गणित

इयत्ता सहावी

सा विद्या या विमुक्तये

१९६७ २०१७

बालभारती सुवर्णमहोत्सव

मंजुरी क्रमांक : मराशैसंप्रप/अविवि/शिप्र २०१५-१६/१६७३

गणित

इयत्ता सहावी

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे - ४११ ००४.

शेजारचा 'क्यू आर कोड' तसेच या पुस्तकात इतर ठिकाणी दिलेले 'क्यू आर कोड' स्मार्टफोनचा वापर करून स्कॅन करता येतात. स्कॅन केल्यावर आपल्याला या पाठ्यपुस्तकाच्या अध्ययन-अध्यापनासाठी उपयुक्त लिंक/लिंक्स (URL) मिळतील.

प्रथमावृत्ती : 2016

© **महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे – ४११ ००४.**

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळाकडे या पुस्तकाचे सर्व हक्क राहतील. या पुस्तकातील कोणताही भाग संचालक, महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ यांच्या लेखी परवानगीशिवाय उद्धृत करता येणार नाही.

गणित विषयतज्ज्ञ समिती

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री. दादासो सरडे (सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती लता टिळेकर (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

गणित विषय – राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्री. उमेश रेळे
श्री. चंदन कुलकर्णी
श्रीमती अनिता जावे
श्रीमती बागेश्री चव्हाण
श्रीमती पूजा जाधव
श्री. आण्णापा परीट
श्री. कल्याण कडेकर
श्री. संदेश सोनावणे
श्री. सुजित शिंदे
डॉ. हनुमंत जगताप
श्री. श्रीपाद देशपांडे
श्री. प्रताप काशिद
श्री. काशिराम बविसाने
श्री. पप्पु गाडे
श्री. अन्सार शेख
श्री. रामा व्हन्याळकर
श्री. प्रमोद ठोंबरे
श्री. प्रकाश झेंडे
श्री. सागर सकुडे
श्री. श्रीकांत रत्नपारखी
श्री. सूर्यकांत शहाणे
श्री. सुरेश दाते
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे
श्री. प्रकाश कापसे
श्री. सलीम हाश्मी
श्रीमती आर्या भिडे
श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री. लक्ष्मण दावणकर
श्री. सुधीर पाटील
श्री. गणेश कोलते
श्री. राजाराम बंडगर
श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री. बन्सी हवाले
श्री. प्रदीप गोडसे
श्री. रवींद्र खंदारे
श्री. राजेंद्र चौधरी

प्रकाशक

विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ,
प्रभादेवी, मुंबई २५.

प्रमुख संयोजक : **उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले**
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

मुखपृष्ठ व सजावट : रेश्मा बर्वे, पुणे.

संगणकीय आरेखन : संदीप कोळी, मुंबई.

चित्रकार : धनश्री मोकाशी व रेश्मा बर्वे

निर्मिती : **सच्चितानंद आफळे**
मुख्य निर्मिती अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिती अधिकारी
प्रशांत हरणे
निर्मिती सहायक

अक्षरजुळणी : गणित विभाग,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

कागद :

मुद्रणादेश :

मुद्रक :

उद्‌देशिका

आम्ही, भारताचे लोक, भारताचे एक सार्वभौम समाजवादी धर्मनिरपेक्ष लोकशाही गणराज्य घडविण्याचा
व त्याच्या सर्व नागरिकांस:

सामाजिक, आर्थिक व राजनैतिक **न्याय;**

विचार, अभिव्यक्ती, विश्वास, श्रद्‌धा

व उपासना यांचे **स्वातंत्र्य;**

दर्जाची व संधीची **समानता;**

निश्चितपणे प्राप्त करून देण्याचा

आणि त्या सर्वांमध्ये व्यक्तीची प्रतिष्ठा

व राष्ट्राची एकता आणि एकात्मता

यांचे आश्वासन देणारी **बंधुता**

प्रवर्धित करण्याचा संकल्पपूर्वक निर्धार करून;

आमच्या संविधानसभेत

आज दिनांक सव्वीस नोव्हेंबर, १९४९ रोजी

याद्‌वारे हे संविधान अंगीकृत आणि अधिनियमित करून स्वत:प्रत अर्पण करीत आहोत.

राष्ट्रगीत

जनगणमन–अधिनायक जय हे
भारत–भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत–भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत.

माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.

मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

प्रस्तावना

राष्ट्रीय अभ्यासक्रम आराखडा २००५ आणि **बालकांचा मोफत व सक्तीच्या शिक्षणाचा हक्क अधिनियम – २००९** अनुसार महाराष्ट्र राज्यात **प्राथमिक शिक्षण अभ्यासक्रम २०१२** तयार करण्यात आला. या शासनमान्य अभ्यासक्रमाची कार्यवाही २०१३–२०१४ या शालेय वर्षापासून क्रमश: सुरू झाली आहे. या अभ्यासक्रमावर आधारित 'गणित' इयत्ता पहिली ते 'गणित' इयत्ता पाचवी ही पाठ्यपुस्तके, पाठ्यपुस्तक मंडळाने प्रकाशित केली आहेत. आता 'गणित' इयत्ता सहावी हे पाठ्यपुस्तक आपल्या हाती देताना आम्हाला विशेष आनंद वाटतो.

उच्च प्राथमिक स्तरावर विद्यार्थ्यांनी नेमक्या कोणत्या क्षमता प्राप्त कराव्यात हे अध्ययन–अध्यापन करताना स्पष्ट असायला हवे. त्यासाठी या पाठ्यपुस्तकात सुरुवातीला गणित विषयक अपेक्षित क्षमता नमूद केल्या आहेत. त्या क्षमतांच्या अनुषंगाने पाठ्यपुस्तकातील आशयाची नावीन्यपूर्ण मांडणी करण्यात आली आहे. आपल्या परिसरात अनेक ठिकाणी गणिताचे अस्तित्व आढळते व त्याचा उपयोग केलेला दिसतो, हे लक्षात आणून देण्याच्या दृष्टीने 'गणित माझा सोबती' या शीर्षकाखाली काही अनुभव दिले आहेत. 'सांगा पाहू' या शीर्षकाखाली दैनंदिन जीवनातील अनुभवांवर आधारित प्रश्न विचारले आहेत. 'हे करून पाहा' या शीर्षकाखाली सुचवलेल्या कृतींतून विद्यार्थी काही संकल्पना शिकू शकतील. विचार करा, गणिती कोडी, खेळ, थोडी गंमत यांचा वापर करून गणित विषय मनोरंजक करण्याचा प्रयत्न केला आहे.

अध्ययन–अध्यापन प्रक्रिया विद्यार्थीकेंद्रित असावी, स्वयंअध्ययन प्रक्रियेवर भर दिला जावा, तसेच शिक्षणाची प्रक्रिया रंजक आणि आनंददायी व्हावी हा दृष्टिकोन समोर ठेवून या पुस्तकाची रचना करण्यात आली आहे. पाठ्यपुस्तकात भूमिती, संख्याज्ञान, संख्याप्रणाली, अपूर्णांक, बीजगणित, व्यावहारिक गणित, माहितीचे व्यवस्थापन या क्षेत्रांमध्ये समाविष्ट असलेल्या संकल्पना सोप्या भाषेत स्पष्ट केल्या आहेत. प्रत्येक पाठ्यघटकाच्या शेवटी सरावासाठी सरावसंच दिले आहेत. या सरावसंचातील उदाहरणांची उत्तरे पाठ्यपुस्तकाच्या शेवटी दिली आहेत. तसेच अध्ययन–अध्यापन प्रभावी होण्यास उपयोगी पडतील अशी 'आय.सी.टी. टूल्स' सुचवली आहेत.

पाठ्यपुस्तक जास्तीत जास्त निर्दोष व दर्जेदार व्हावे, या दृष्टीने महाराष्ट्राच्या सर्व भागांतील निवडक शिक्षक तसेच काही शिक्षणतज्ज्ञ व विषयतज्ज्ञ यांच्याकडून या पुस्तकाचे समीक्षण करण्यात आले आहे. आलेल्या सूचना व अभिप्राय यांचा काळजीपूर्वक विचार करून या पुस्तकाला अंतिम स्वरूप देण्यात आले आहे.

मंडळाची गणित विषय समिती, अभ्यासगट सदस्य, चित्रकार यांनी अतिशय आस्थेने हे पुस्तक तयार केले आहे. मंडळ या सर्वांचे मन:पूर्वक आभारी आहे.

विद्यार्थी, शिक्षक व पालक या पुस्तकाचे स्वागत करतील, अशी आशा आहे.

(चं.रा.बोरकर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे.

पुणे
दिनांक : ८ एप्रिल २०१६
१९ चैत्र १९३८

गणित विषयक क्षमता : इयत्ता ६ वी

इयत्ता ६ वी च्या अखेरीस विद्यार्थ्यांमध्ये पुढील क्षमता विकसित व्हाव्या, अशी अपेक्षा आहे.

क्षेत्र – भूमिती

1. **भूमितीतील मूलभूत संबोध**
- बिंदू, रेषा, रेषाखंड, किरण व समांतर रेषा समजणे, त्यांची नावे वाचता व लिहिता येणे, प्रतल ओळखता येणे, एकरेषीय व नैकरेषीय बिंदू, एकसंपात बिंदू समजणे व ओळखता येणे.

2. **कोन**
- कोनाचे प्रकार ओळखता येणे व कोनांचे वर्गीकरण करता येणे.

3. **त्रिकोण**
- त्रिकोणाचे शिरोबिंदू, कोन व बाजू ओळखता येणे, लिहिता येणे व वाचता येणे.
- बाजूंवरून होणारे व कोनांवरून होणारे त्रिकोणाचे प्रकार समजणे.
- त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते हे समजणे व त्याचा उपयोग करता येणे.
- त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या लांबींची बेरीज तिसऱ्या बाजूच्या लांबीपेक्षा जास्त असते हा गुणधर्म समजणे.

4. **चौकोन व बहुभुजाकृती**
- शिरोबिंदू, कोन व बाजू हे चौकोनाचे घटक समजणे, संमुख बाजू, संमुख कोन, लगतचे कोन व लगतच्या बाजू ओळखता येणे
- चौकोनाचे कर्ण समजणे, चौकोनाच्या चारही कोनांच्या मापांची बेरीज 360° असते हा गुणधर्म समजणे.
- तीनपेक्षा जास्त बाजूंच्या बहुभुजाकृती ओळखता येणे.

5. **प्रतिबिंबित सममिती**
- प्रतिबिंबित सममिती ओळखता येणे, सममिती अक्ष ओळखता येणे व काढता येणे.
- सममिती अक्ष दिल्यावर सममित आकृती पूर्ण करता येणे.

6. **भौमितिक रचना**
- कंपासपेटीतील साहित्याचा उपयोग समजणे.
- रेषाखंडाचा लंब दुभाजक काढता येणे, रेषेवरील बिंदूतून त्या रेषेला लंब काढता येणे, रेषेबाहेरील बिंदूतून त्या रेषेला लंब काढता येणे, कोन दुभाजक काढता येणे, दिलेल्या कोनाएवढा कोन काढता येणे.

7. **त्रिमितीय आकार**
- चिती व सूची यातील फरक समजणे.
- नेटस्‌च्या सहाय्याने त्रिकोणी चिती, चौकोनी चिती इ. वेगवेगळ्या चिती तयार करता येणे.
- चिती, सूची, वृत्तचिती, शंकू व गोल यांची पृष्ठे, कडा, शिरोबिंदू ओळखून त्यांची संख्या सांगता येणे.

क्षेत्र – संख्याज्ञान

1. **विभाज्यता**
- विभाजक ओळखता येणे, सामाईक विभाजक ओळखता येणे, दोन किंवा तीन संख्यांचा महत्तम सामाईक विभाजक काढता येणे. विभाज्य संख्या ओळखता येणे, सामाईक विभाज्य ओळखता येणे, लघुत्तम सामाईक विभाज्य काढता येणे.

क्षेत्र – संख्याप्रणाली

1. **पूर्णांक संख्या**

- नैसर्गिक संख्या, पूर्ण संख्या व पूर्णांक संख्या समजणे, ओळखता येणे आणि संख्यारेषेवर दाखवता येणे.
- पूर्णांक संख्यांचा लहानमोठेपणा, बेरीज व वजाबाकी समजणे व करता येणे.

क्षेत्र – अपूर्णांक

1. **अपूर्णांकांवरील क्रिया**

- अपूर्णांक संख्यारेषेवर दाखवता येणे.
- पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक व अंशाधिक अपूर्णांक यांचे परस्परात रूपांतर करता येणे.
- अपूर्णांकांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार करता येणे व त्यांचा उपयोग करता येणे.

2. **दशांश अपूर्णांक**

- दशांश अपूर्णांक संख्यारेषेवर दाखवता येणे.
- दशांश अपूर्णांक व व्यवहारी अपूर्णांक यांचे परस्परांत रूपांतर करता येते.
- दशांश अपूर्णांकांचे सोपे गुणाकार व भागाकार करता येणे.

क्षेत्र – बीजगणित

1. **समीकरणे**

- चलाचा उपयोग करून दिलेली माहिती समीकरण रूपात लिहिता येणे.
- समीकरणाची उकल समजणे व समीकरणाची उकल काढण्यासाठी वापरलेल्या क्रिया समजणे, वापरता येणे व साधी समीकरणे सोडवता येणे.

क्षेत्र – व्यावहारिक गणित

1. **गुणोत्तर व प्रमाण**

- दोन संख्यांचे गुणोत्तर व प्रमाण या शब्दांचा अर्थ समजणे व त्यांचा व्यवहारातील उपयोग समजणे.
- एकमान पद्धतीचा वापर समजणे व त्याचा उपयोग करता येणे.

2. **शेकडेवारी**

- शेकडेवारी, शेकडेवारीचे चिन्ह यांचा अर्थ समजणे व त्यांचा उपयोग करता येणे.
- दिलेल्या माहितीचे रूपांतर शेकडेवारीत व शेकडेवारीत दिलेल्या माहितीचे रूपांतर संख्येत करता येणे.

3. **नफा–तोटा**

- खरेदी व विक्री माहीत असता शेकडा नफा किंवा शेकडा तोटा शोधता येणे व त्याचा उपयोग करता येणे.

4. **बँक**

- बँकेची आवश्यकता व उपयोग समजणे. बँकेतील विविध फॉर्म कसे भरावेत हे समजणे.
- मुद्दल, व्याज व दर समजणे, त्यावरून एका वर्षाचे सरळव्याज काढता येणे.

क्षेत्र – माहितीचे व्यवस्थापन

1. **स्तंभालेख**

- स्तंभालेखाची गरज समजणे. स्तंभालेखाचे वाचन करता येणे.
- आलेख कागदाचा उपयोग करून दिलेल्या माहितीसाठी स्तंभालेख काढता येणे.

अनुक्रमणिका

विभाग पहिला

1. भूमितीतील मूलभूत संबोध .... 1 ते 5
2. कोन .... 6 ते 11
3. पूर्णांक संख्या .... 12 ते 20
4. अपूर्णांकांवरील क्रिया .... 21 ते 28
5. दशांश अपूर्णांक .... 29 ते 34
6. स्तंभालेख .... 35 ते 39
7. सममिती .... 40 ते 42
8. विभाज्यता .... 43 ते 45
9. मसावि–लसावि .... 46 ते 50

विभाग दुसरा

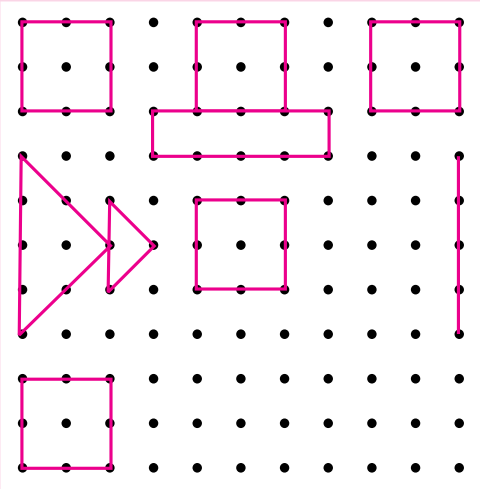
10. समीकरणे .... 51 ते 55
11. गुणोत्तर–प्रमाण .... 56 ते 60
12. शेकडेवारी .... 61 ते 64
13. नफा–तोटा .... 65 ते 72
14. बँक .... 73 ते 76
15. त्रिकोण व त्रिकोणाचे गुणधर्म .... 77 ते 80
16. चौकोन .... 81 ते 86
17. भौमितिक रचना .... 87 ते 92
18. त्रिमितीय आकार .... 93 ते 97

उत्तरसूची .... 98 ते 104

1 भूमितीतील मूलभूत संबोध

विभाग पहिला

चला, चर्चा करूया.



रांगोळी पूर्ण करा. रांगोळी पूर्ण करून झाल्यावर खालील प्रश्नांच्या मदतीने वर्गात चर्चा करा.

(1) रांगोळी काढण्यासाठी पृष्ठभाग कसा हवा ?

(2) रांगोळी काढताना सुरुवात कशी केली ?

(3) रांगोळी पूर्ण करण्यासाठी काय काय केले ?

(4) रांगोळीत तुम्हांला कोणकोणते आकार दिसतात ?

(5) स्कूटरवर किंवा हत्तीच्या पाठीवर रांगोळी काढता येईल का ?

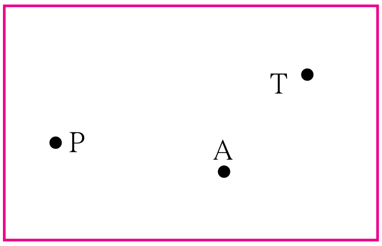
(6) कागदावर रांगोळी काढताना ठिपके कशाने काढतात ?

जाणून घेऊया.

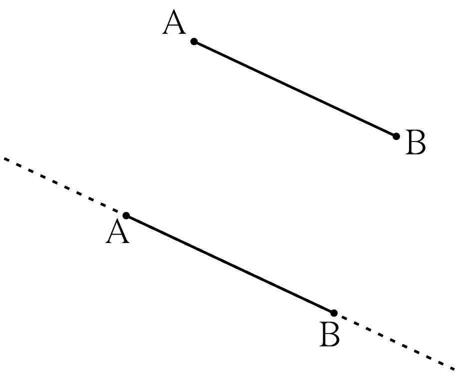
बिंदू

बिंदू लहानशा ठिपक्याने दर्शवला जातो. पेन किंवा टोकदार पेन्सिलने कागदावर लहानसा ठिपका काढता येतो. रांगोळीचे ठिपके ही बिंदूंची प्रतीके आहेत.

बिंदूला नाव देता येते. बिंदूचे नाव लिहिताना अक्षरांचा वापर करतात. शेजारील आकृतीत बिंदू P, बिंदू A व बिंदू T दाखवले आहेत.



रेषाखंड व रेषा

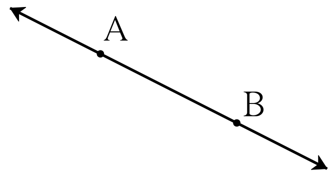


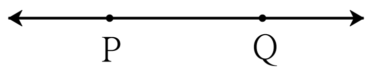
कागदावर A व B असे दोन बिंदू घ्या व ते पट्टीच्या मदतीने जोडा. आपल्याला AB ही सरळ रेघ मिळते. ही रेघ B च्या बाजूने पुढे वाढवता येईल का ? A च्या बाजूने वाढवता येईल का ? किती वाढवता येईल ?

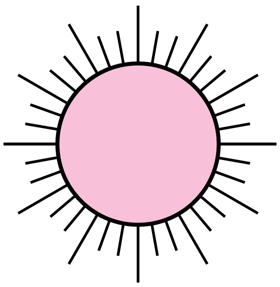
ही रेघ जेवढा कागद आहे तेवढी दोन्ही दिशांना वाढवता येईल.

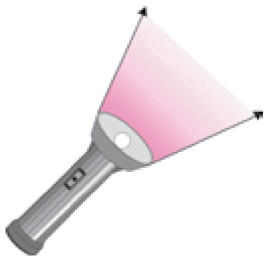
कागद खूप मोठा असेल, तर ती खूप मोठी काढता येईल. मैदानावर किती मोठी रेघ काढता येईल?

आपण अशी कल्पना करू, की ही रेघ दोन्ही बाजूंना अमर्याद वाढवता येईल, अशा आकृतीला **रेषा** म्हणतात. अशी रेषा कागदावर दाखवताना दोन्ही बाजूंना अमर्याद आहे हे बाणांनी दाखवतात. गणितात रेषा म्हणजे सरळ रेषा. आपण काढलेली पहिली रेघ A पासून B पर्यंतच होती. ती रेघ या नव्या रेषेचा तुकडा म्हणजे **रेषाखंड** आहे. खंड म्हणजे तुकडा. रेषाखंडाला त्याच्या मर्यादा दाखवणारे दोन बिंदू असतात. त्यांना **अंत्यबिंदू** म्हणतात. रेषाखंड AB हा थोडक्यात **रेख AB** असा लिहितात. A व B हे त्याचे अंत्यबिंदू आहेत. रेषा एका लहान इंग्रजी अक्षराने किंवा रेषेवरील कोणत्याही दोन बिंदूंच्या साहाय्याने दाखवली जाते. इथे रेषा *l* दाखवली आहे. तिचे नाव रेषा PQ किंवा रेषा QP असे देखील लिहिता येते.





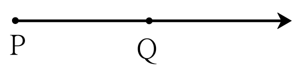




किरण

शेजारील चित्रे पाहा. काय दिसते? सूर्यापासून निघणारे किरण सर्व दिशांना पुढे पुढे जात राहतात. विजेरीचे प्रकाशकिरण, एका ठिकाणाहून निघून एकाच दिशेने पुढे पुढे जात राहतात.

किरण हा रेषेचा एक भाग आहे. एका बिंदूपासून सुरुवात होऊन तो एकाच दिशेने पुढे पुढे जात राहतो. किरणाच्या सुरवातीच्या बिंदूला **आरंभबिंदू** म्हणतात. येथे P हा आरंभबिंदू आहे. Q च्या दिशेने किरण अमर्याद आहे, हे दाखवण्यासाठी बाण काढला आहे. शेजारील आकृतीचे वाचन **किरण PQ** असे करतात.

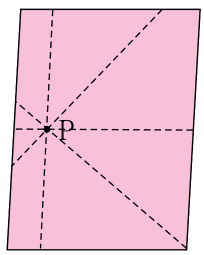


किरण PQ चे वाचन किरण QP असे करत नाहीत.

हे करून पाहा.

कृती : फळ्यावर एक बिंदू काढा. प्रत्येक विद्यार्थ्याने फळ्याजवळ जाऊन त्या बिंदूतून जाणारी रेषा काढा.
अशा किती रेषा काढता येतील ?

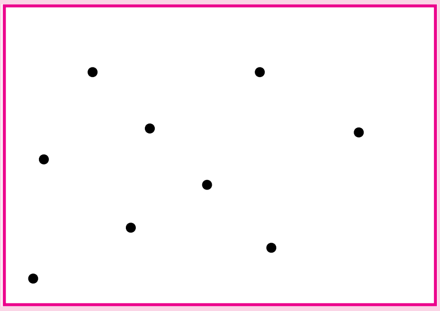
कृती : वहीवर एक बिंदू काढून त्यातून जाणाऱ्या रेषा पट्टीच्या साहाय्याने काढा. अशा किती रेषा काढता येतील ?



एका बिंदूतून असंख्य रेषा काढता येतात.

जेव्हा दोनपेक्षा अधिक रेषा एकाच बिंदूत छेदतात तेव्हा त्या रेषांना **एकसंपाती रेषा** म्हणतात व त्यांच्या छेदनबिंदूला **संपातबिंदू** म्हणतात. वरील आकृतीत संपातबिंदू कोणता, त्याचे नाव लिहा.

सांगा पाहू !

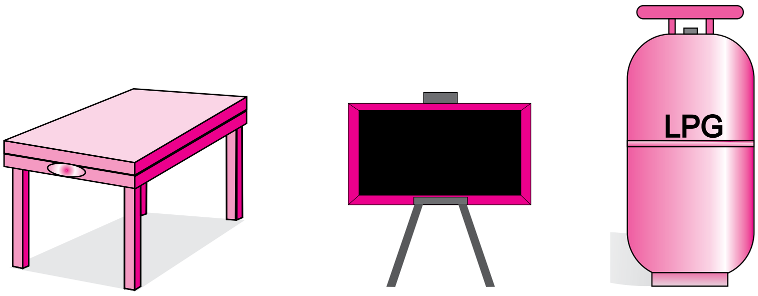


शेजारील आकृतीत नऊ बिंदू आहेत. त्यांना नावे द्या. त्यांतील कोणत्याही दोन बिंदूंतून किती रेषा जातात? **दोन भिन्न बिंदूंमधून एक आणि एकच रेषा काढता येते.** या नऊ बिंदूंपैकी कोणते तीन किंवा अधिक बिंदू एका सरळ रेषेवर आहेत? **जे तीन किंवा अधिक बिंदू एका सरळ रेषेत असतात त्यांना एकरेषीय बिंदू म्हणतात.**

या नऊ बिंदूंपैकी कोणते तीन किंवा अधिक बिंदू एका सरळ रेषेवर नाहीत?
जे बिंदू एका सरळ रेषेत नसतात त्यांना नैकरेषीय (न + एकरेषीय) बिंदू म्हणतात.

जाणून घेऊया.

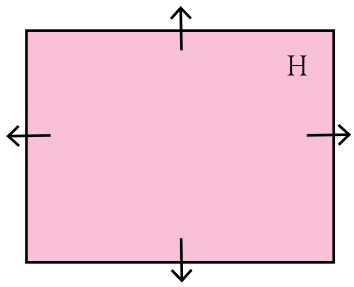
प्रतल

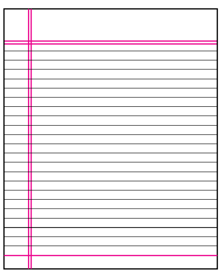


शेजारील चित्रातील तीनही आकृत्यांचे पृष्ठभाग कसे आहेत ?

पहिल्या दोन चित्रांतील पृष्ठभाग सपाट आहेत. हा सपाट पृष्ठभाग, एका अमर्याद पृष्ठाचा भाग आहे. **सपाट पृष्ठभागाला गणिती भाषेत प्रतल म्हणतात.**

शेजारील आकृतीतील प्रतलाचे नाव 'H' आहे. प्रतलाची आकृती मर्यादित काढलेली असली तरी प्रतल चोहोबाजूंना अमर्याद असते. प्रतल सर्व दिशांना अमर्याद आहे, हे बाणांनी दाखवले जाते. परंतु अनेकदा सोईसाठी हे बाण काढले जात नाहीत.





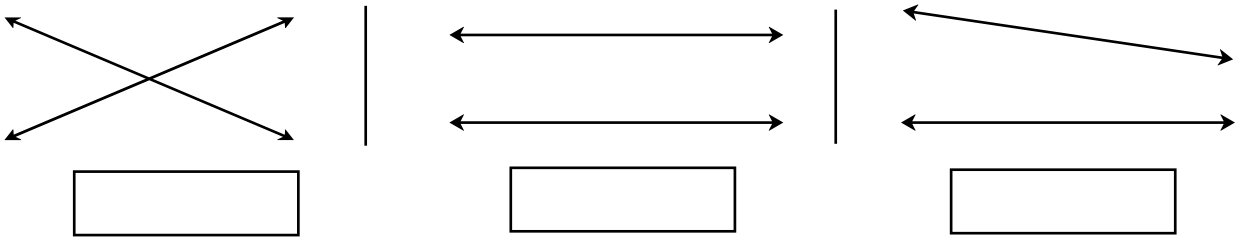
समांतर रेषा

शेजारील चित्रातील वहीचे पान पाहा. वहीचे पान हा प्रतलाचा भाग आहे का? वहीच्या पानावरील आडव्या रेघा वाढवल्या, तर एकमेकींना मिळतात का?

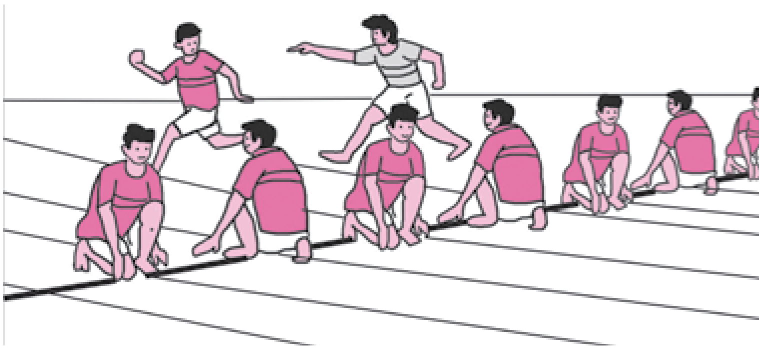
हे मला समजले.

एका प्रतलात असलेल्या व एकमेकींना न छेदणाऱ्या रेषांना समांतर रेषा असे म्हणतात.

खालील रिकाम्या चौकटींत 'छेदणाऱ्या रेषा' किंवा 'समांतर रेषा' यांपैकी योग्य तो पर्याय लिहा.

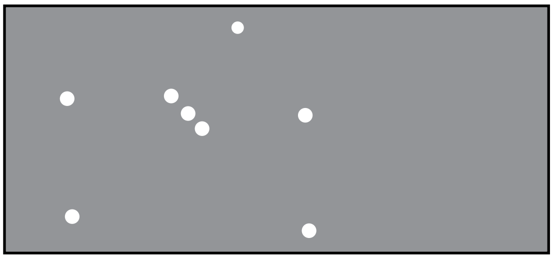


गणित माझा सोबती : मैदानावर, आकाशात.



चित्रातील खेळाचे निरीक्षण करा. या खेळातील एकरेषीय व नैकरेषीय खेळाडू, समांतर रेषा व प्रतल शोधा.

जानेवारीमध्ये संध्याकाळी सातनंतर आकाशात पूर्वेकडे मृग नक्षत्र दिसते. नंतर ते हळूहळू आकाशात वर जाते. या नक्षत्रात एका सरळ रेषेत तीन तारे दिसतात का ? त्याच रेषेवर काही अंतरावर एखादा ठळक तारा दिसतो का ?



सरावसंच 1

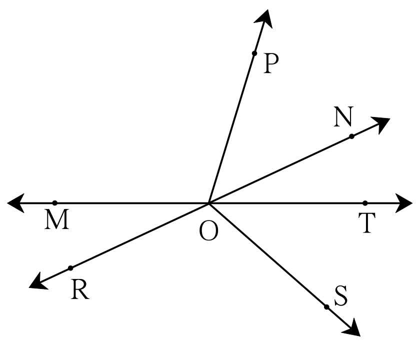
1. शेजारील आकृतीवरून नावे लिहा.

   (1) एकरेषीय बिंदू

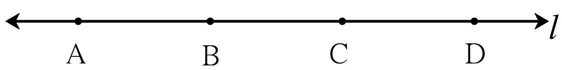
   (2) किरण

   (3) रेषाखंड

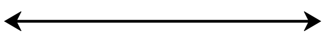
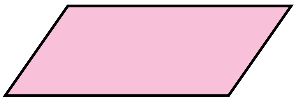
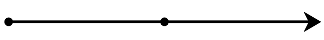
   (4) रेषा



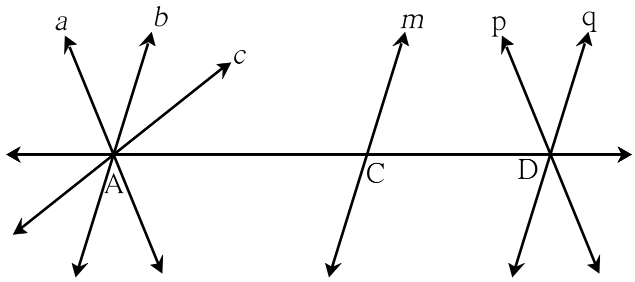
2. शेजारील रेषेची वेगवेगळी नावे लिहा.

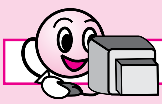


3. जोड्या लावा.

A गट		B गट
(i)		(a) किरण
(ii)		(b) प्रतल
(iii)		(c) रेषा
(iv)		(d) रेषाखंड

4. खालील आकृतीचे निरीक्षण करा. त्यातील समांतर रेषा, एकसंपाती रेषा व संपात बिंदू यांची नावे लिहा.



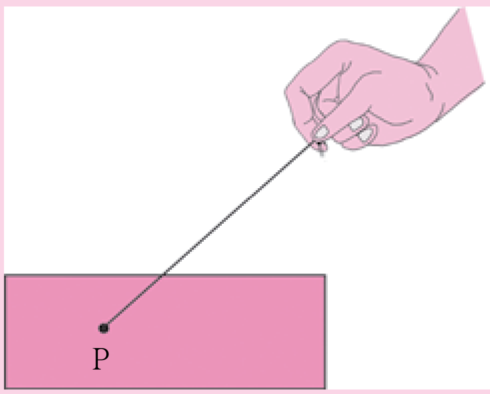


ICT Tools or Links

Geogebra सॉफ्टवेअरच्या tools चा वापर करून वेगवेगळे बिंदू, रेषा, किरण काढा. कधीही न संपणाऱ्या रेषेचा अनुभव घ्या.

थोडी गंमत !

एक सपाट थर्मोकोलचा किंवा पुठ्ठ्याचा तुकडा व सुई दोरा घ्या. दोऱ्याच्या एका टोकाला मोठी गाठ मारा किंवा एखादे बटण बांधा. दुसरे टोक सुईत ओवून सुई पुठ्ठ्याच्या खालून टोचून वर काढा. जेथून दोरा वर आला आहे त्या बिंदूला P नाव द्या. आता सुई काढून ठेवा व दोऱ्याचे सुटे टोक ताणून धरा. कोणती आकृती दिसते? दोऱ्याचे सुटे टोक सावकाश वेगवेगळ्या दिशांना वळवून ताणून धरा. P बिंदूतून असंख्य रेषा जातात हे अनुभवा.

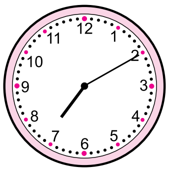


2 कोन

जरा आठवूया.

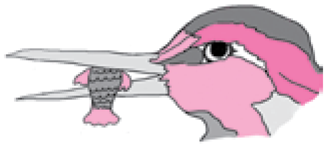
कोन

खालील चित्रांत दिसणारे कोन पाहा. त्यांचा प्रकार ओळखून त्या चित्राखाली लिहा.



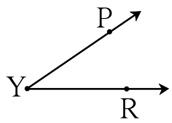
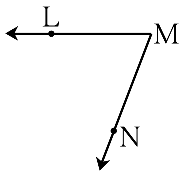
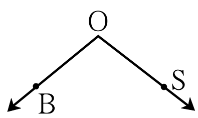
....

....

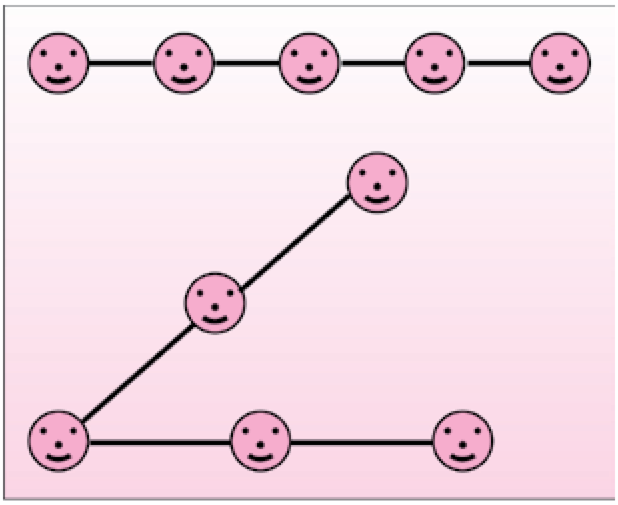


....

खालील सारणी पूर्ण करा.

कोन			
कोनाचे नाव			
कोनाचा शिरोबिंदू			
कोनाच्या बाजू			

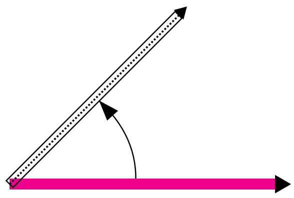
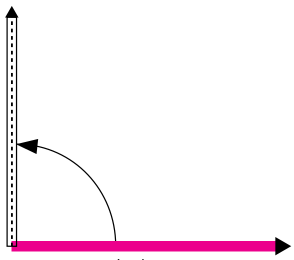
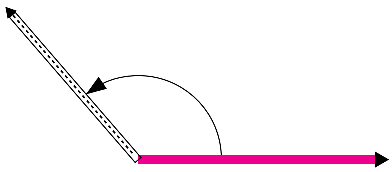
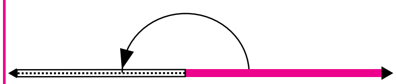
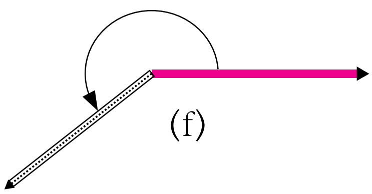
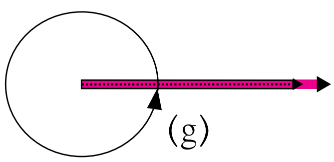
हे करून पाहा.



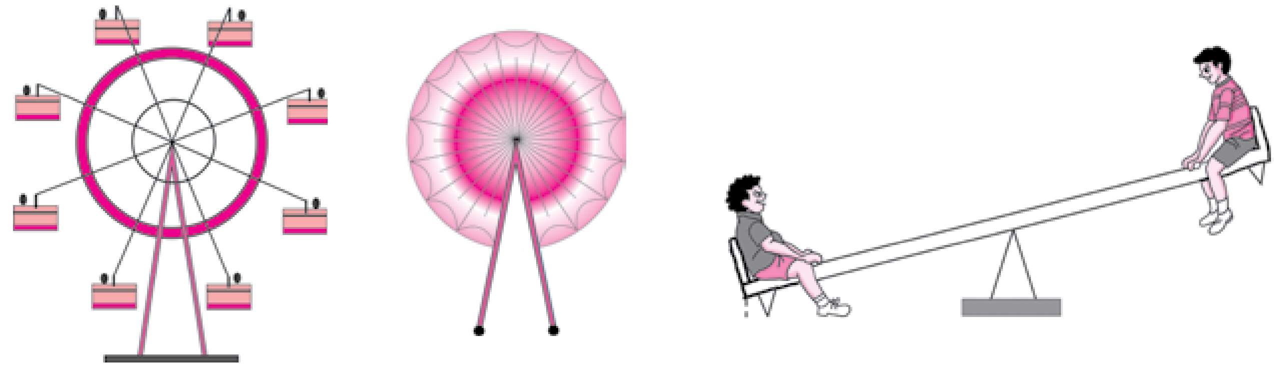
कृती : तीन किंवा अधिक विद्यार्थ्यांना एका सरळ रेषेत उभे करा. दोन लांब दोऱ्या घ्या. मधल्या मुलाच्या हातांत दोन्ही दोऱ्यांचे एक-एक टोक द्या. दोन्ही बाजूंची मुले दोऱ्यांच्या साहाय्याने सरळ रेषेत उभी राहतील असे पाहा. विद्यार्थ्यांना फिरायला सांगून लघुकोन, काटकोन, विशालकोन, सरळकोन, प्रविशालकोन व पूर्ण कोन या आकृत्या तयार होतील असे पाहा. मुले सरळ रेषेत आहेत हे पाहण्यासाठी ताणलेल्या दोरीचा उपयोग होईल.

हे करून पाहा.

दोन वेगवेगळ्या रंगांच्या काड्यांच्या साहाय्याने (a) ते (g) पर्यंतच्या कोनांची रचना अनुभवा.

(a)	आकृती (a) मध्ये दोन्ही काड्या एकमेकींवर स्थिर असून त्यांच्या मूळ स्थितीत कोणताच बदल झाला नाही. या स्थितीत काड्यांमधील कोनाला **शून्य कोन** म्हणतात. शून्य कोनाचे माप 0° असे लिहितात.
 (b)	आता एका रंगाची काडी स्थिर ठेवून दुसरी काडी आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे फिरवा. आकृती (b) मध्ये तयार झालेला कोन .... आहे. 0° पेक्षा मोठा परंतु 90° पेक्षा लहान असलेल्या कोनाला .... म्हणतात.
 (c)	आकृती (c) मध्ये तयार झालेला कोन .... आहे. 90° च्या कोनाला .... म्हणतात.
 (d)	आकृती (d) मध्ये तयार झालेला कोन .... आहे. 90° पेक्षा मोठा परंतु 180° पेक्षा लहान असलेल्या कोनाला .... म्हणतात.
 (e)	आकृती (d) मध्ये बाणाच्या दिशेने दाखवल्याप्रमाणे काडी फिरवून आकृती (e) प्रमाणे स्थिती मिळेल. अशा स्थितीमधील कोन म्हणजे **सरळ कोन** होय. सरळ कोनाचे माप 180° असते.
 (f)	काडी पुन्हा आकृती (e) मध्ये बाणाच्या दिशेने दाखवल्याप्रमाणे फिरवली, तर आकृती (f) मधील कोन मिळतो. हा कोन 180° पेक्षा मोठा आहे. अशा कोनाला **प्रविशाल कोन** म्हणतात. प्रविशाल कोन 180° पेक्षा मोठा व 360° पेक्षा लहान असतो.
 (g)	आकृती (f) मधील काडी एक फेरा पूर्ण करून पुन्हा मूळच्या स्थितीत आकृती (g) प्रमाणे येते. सरळ कोनापर्यंत 180° व सरळ कोनानंतर 180° असे एकूण 360° काडी फिरली आहे. अशा प्रकारे तयार होणाऱ्या कोनाला **पूर्ण कोन** म्हणतात. पूर्ण कोनाचे माप 360° असते.

गणित माझा सोबती : जत्रेत, घरात, बागेत.



वरील चित्रे पाहा व कोनांचे प्रकार ओळखा.

सरावसंच 2

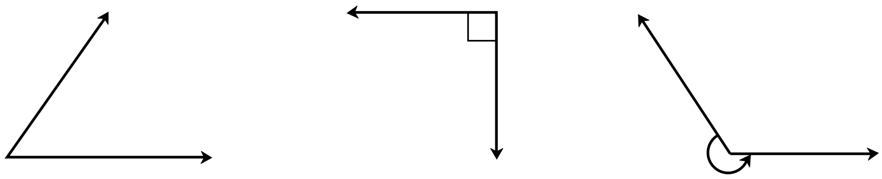
1. जोड्या लावा.

कोनाचे माप	कोनाचा प्रकार
(1) 180°	(a) शून्य कोन
(2) 240°	(b) सरळ कोन
(3) 360°	(c) प्रविशाल कोन
(4) 0°	(d) पूर्ण कोन

2. खाली कोनांची मापे दिली आहेत, त्यांवरून प्रत्येक कोनाचा प्रकार लिहा.

(1) 75° (2) 0°
(3) 215° (4) 360°
(5) 180° (6) 120°
(7) 148° (8) 90°

3. खालील आकृत्या पाहा व कोनांचा प्रकार लिहा.



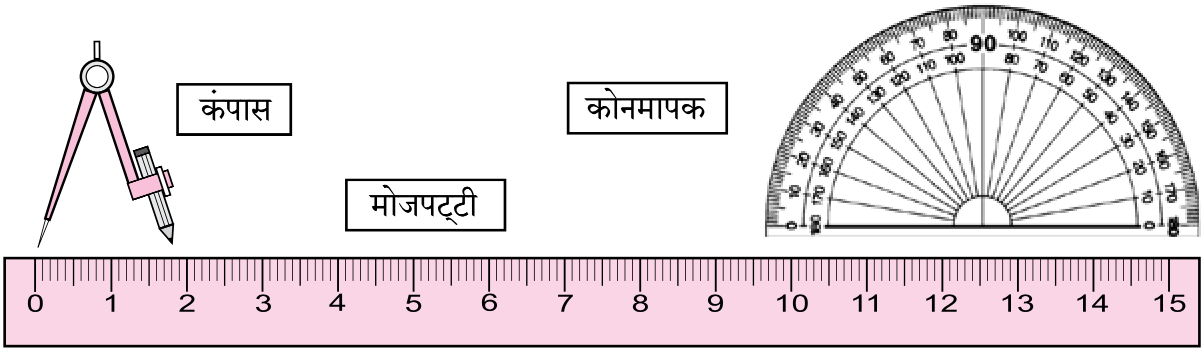
(*a*) (b) (c)

(d) (e) (f)

4. कोनमापकाच्या साहाय्याने लघुकोन, काटकोन व विशालकोन काढा.

जरा आठवूया.

कंपासपेटीतील साधनांची ओळख व उपयोग

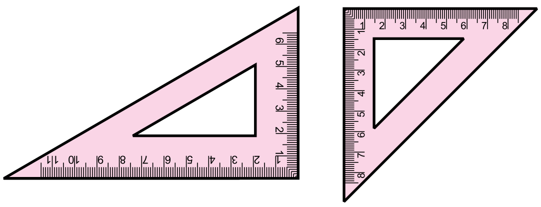


वरील साधनांचा उपयोग कशासाठी करतात हे आपल्याला माहीत आहे.

जाणून घेऊया.

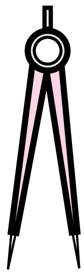
कंपासपेटीमध्ये अजूनही दोन प्रकारची साधने असतात. त्यांचा उपयोग कसा करायचा ते पाहू.

गुण्या



कंपासपेटीत असणारे दोन गुण्ये पाहा. गुण्यांचे कोन तपासा. 90°, 30°, 60°, 45° हे कोन काढण्यासाठी यांचा उपयोग होतो, हे अनुभवा.

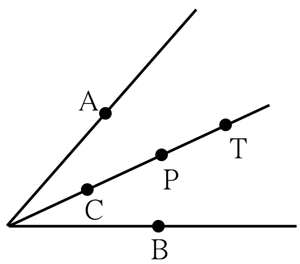
कर्कटक



बाजूला दाखवलेल्या साधनाला **कर्कटक** म्हणतात. दोन बिंदूंतील अंतर मोजण्यासाठी कर्कटकाचा उपयोग करतात. त्यासाठी सोबत मोजपट्टीही वापरावी लागते.

हे करून पाहा.

कोनदुभाजक



एक ट्रेस कागद घ्या. ट्रेस कागदावर कोणत्याही मापाचा एक कोन काढा. कोनाच्या दोन्ही भुजा एकमेकांवर येतील अशी घडी घाला. तयार झालेल्या घडीमुळे काय होते ? निरीक्षण करा. तयार झालेल्या घडीमुळे कोनाचे दोन समान भाग होतात. ती घडी म्हणजे त्या कोनाचा **दुभाजक** होय.

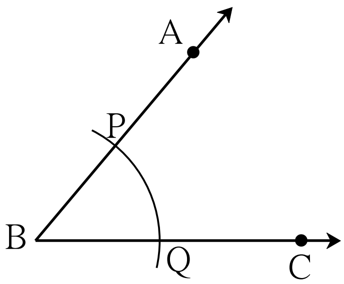
शिरोबिंदूपासून कोनाच्या भुजांवर समान अंतरावर बिंदू A व बिंदू B घ्या. आता कोनदुभाजकावर बिंदू C, P, T घ्या. या प्रत्येक बिंदूपासून बिंदू A व बिंदू B चे अंतर मोजा.

कोनदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू A व B बिंदूपासून समान अंतरावर आहे याचा अनुभव घ्या.

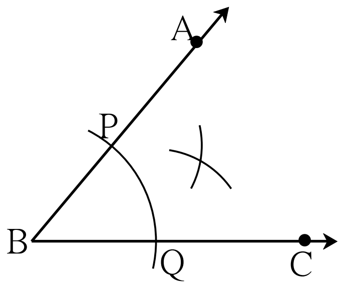
कंपासपेटीतील साधनांचा उपयोग करून भौमितिक रचना कशा करायच्या ते पाहू.

(1) कंपासच्या साहाय्याने कोनदुभाजक काढणे

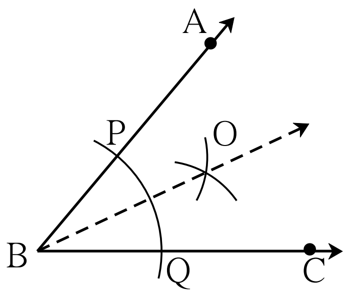
उदा. कोन ABC हा कोणताही एक कोन काढा. या कोनाचा दुभाजक काढा.



- कोणत्याही मापाचा ∠ABC काढा.
- कंपासमध्ये सोईस्कर अंतर घेऊन त्याचे टोक B बिंदूवर ठेवा. किरण BA व किरण BC यांना छेदणारा एक कंस काढा. छेदनबिंदूंना P व Q नावे द्या.



- आता कंपासमध्ये पुरेसे अंतर घेऊन, कंपासचे टोक P बिंदूवर ठेवून, कोनाच्या अंतर्भागात एक कंस काढा. कंपासमध्ये तेच अंतर कायम ठेवून, कंपासचे टोक Q बिंदूवर ठेवून, पूर्वीच्या कंसाला छेदणारा दुसरा कंस काढा.

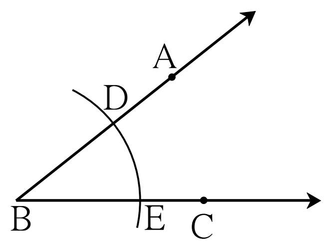


- दोन कंसांच्या छेदनबिंदूला O नाव द्या. किरण BO काढा.
  किरण BO हा ∠ABC चा दुभाजक आहे.
  कोनमापकाने ∠ABO आणि ∠CBO मोजा.
- हे कोन समान मापांचे आहेत का ?

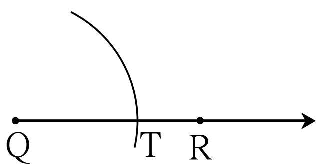
(2) दिलेल्या कोनाच्या मापाएवढे माप असणारा कोन, कंपास व पट्टीच्या साहाय्याने काढणे

उदा. सोबतच्या आकृतीत दिलेला ∠ABC पाहा.

त्यावरून ∠ABC एवढा ∠PQR काढा.

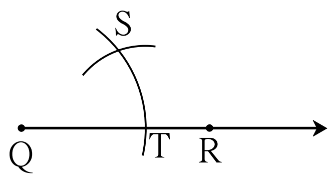


- किरण QR काढा.
- कंपासमध्ये सोईस्कर अंतर घ्या.
- कंपासचे टोक ∠ABC च्या शिरोबिंदू B वर ठेवा आणि किरण BA व किरण BC यांना छेदणारा कंस काढून या छेदनबिंदूंना D व E नावे द्या.
- कंपासमध्ये घेतलेले अंतर कायम ठेवा. कंपासचे टोक किरण QR च्या बिंदू Q वर ठेवून एक कंस काढा. हा कंस रेषा QR ला ज्या बिंदूत छेदेल त्या बिंदूस T नाव द्या.

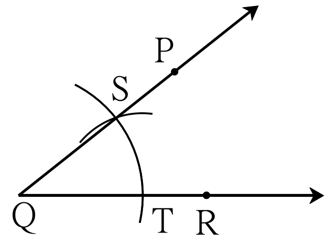


- आता कंपासचे टोक E बिंदूवर ठेवून कंपासमधील पेन्सिलचे टोक D वर पडेल इतके अंतर कंपासमध्ये घ्या.

- कंपासमधील अंतर न बदलता आता कंपासचे टोक बिंदू T वर ठेवा आणि पूर्वी काढलेल्या कंसाला छेदणारा दुसरा कंस काढा. दोन्ही कंसांच्या छेदनबिंदूस S नाव द्या.



- किरण QS काढा. या किरणावर आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे P बिंदू घ्या.
- तयार झालेला ∠PQR हा ∠ABC एवढा आहे, हे कोनमापकाच्या साहाय्याने तपासून घ्या.



हे करून पाहा.

(1) कोनदुभाजकाची रचना करून 30° मापाचा कोन काढा.
प्रथम 60° मापाचा ∠ABC काढा. कंपास व पट्टीच्या साहाय्याने ∠ABC दुभागा. मिळणाऱ्या प्रत्येक कोनाचे माप किती ते कोनमापकाने मोजा.

(2) कोनदुभाजकाची रचना करून 45° मापाचा कोन काढा.
एकमेकींना छेदणाऱ्या दोन लंब रेषा काढा व कोनदुभाजकाची रचना करून 45° मापाचा कोन काढा.

सरावसंच 3

1. कंपासपेटीतील योग्य साहित्य वापरून खालील कोन काढा. कंपास व पट्टीचा उपयोग करून तो दुभागा.

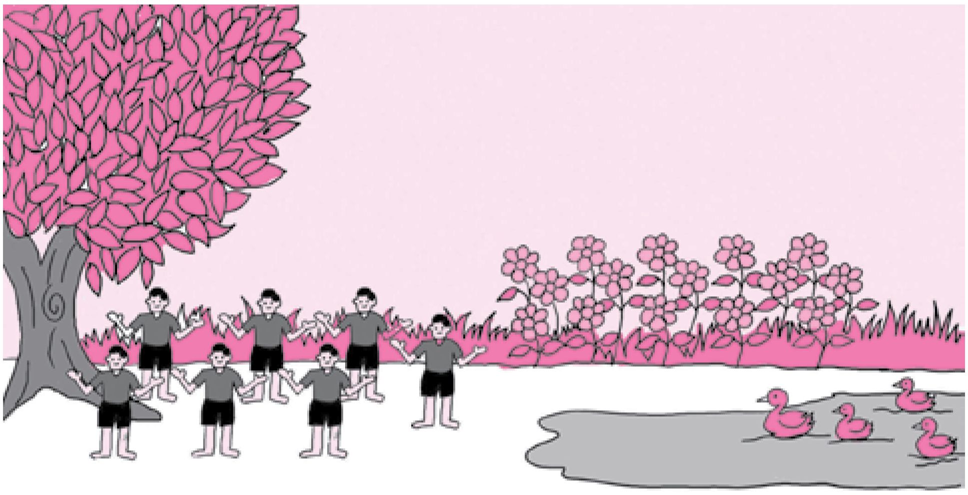
(1) 50° (2) 115° (3) 80° (4) 90°

ICT Tools or Links

Geogebra मधील विविध tools चा वापर करून वेगवेगळ्या कोनांचे आकार काढा. त्यांच्या मापांमध्ये move option चा वापर करून होणारे बदल अनुभवा.

3 पूर्णांक संख्या

जरा आठवूया.



चित्रात किती बदके, किती मुले आणि किती फुले आहेत हे मोजा. किती वस्तू आहेत याचे उत्तर काढण्यासाठी वस्तू मोजाव्या लागतात. निसर्गातील वस्तू मोजण्याच्या गरजेतून संख्या निर्माण झाल्या. वस्तूंची मोजणी आपण संख्येच्या रूपात लिहितो.

चला, चर्चा करूया.

दादा : आतापर्यंत आपण मोजण्यासाठी वापरलेल्या 1, 2, 3, 4,... या संख्यांना **मोजसंख्या** म्हणतात. मोजसंख्यांना **नैसर्गिक संख्या** असेही म्हणतात, पण आकाशातील चांदण्या, समुद्रकिनाऱ्यावरील वाळूचे कण आपल्याला मोजता येतील का ? ते असंख्य असतात त्याप्रमाणे नैसर्गिक संख्याही असंख्य आहेत. त्यांची यादी पाहा.

नैसर्गिक संख्या : 1, 2, 3, 4, ..., 321, 322, ..., 28573,....

समीर : आपण पूर्वीच या नैसर्गिक संख्यांच्या बेरजा, वजाबाक्या देखील शिकलो आहोत. पण 5 मधून 5 वजा केले तर बाकी काहीच उरत नाही. त्यासाठी आपण शून्य लिहितो ते इथे दिसत नाही.

दादा : ते तर हवेच. **शून्य आणि सर्व नैसर्गिक संख्या मिळून तयार झालेला संख्यासमूह म्हणजे पूर्ण संख्या समूह.**

पूर्ण संख्या : 0, 1, 2, 3, 4, ..., 367, 368, ..., 237105,...

दादा : या पूर्ण संख्यासमूहात नसलेल्या काही संख्यासुद्धा आपल्याला व्यवहारात वापराव्या लागतात.

सलमा : त्या कोणत्या ?

दादा : उदाहरणच पाहू. महाराष्ट्रात हिवाळ्यात तापमान 10 °C (दहा अंश सेल्सिअस) किंवा 8 °C इतके खाली जाते, पण ते कधी 0 °C पर्यंत खाली जात नाही. काश्मीरमध्ये मात्र ते कधी कधी 0°C पेक्षाही खाली जाते. ते दाखवण्यासाठी 0 पेक्षा लहान संख्यांची जरुरी भासते.

समीर : जानेवारीत वर्तमानपत्रात आले होते, की काश्मीरमध्ये बर्फ पडला तेव्हा श्रीनगरचे तापमान −8 °C झाले, ते कसे वाचतात ?

दादा : ते ऋण आठ अंश सेल्सिअस असे वाचतात. नेहमीच्या संख्येमागे (−) हे चिन्ह दिले, की ती संख्या 0 पेक्षा लहान होते. तिला **ऋण संख्या** म्हणतात. तापमापीवर 0 पेक्षा वरच्या 1, 2, 3,... अशा वाढत जाणाऱ्या संख्या असतात. त्यांना **धन संख्या** म्हणतात. 0 च्या खालच्या संख्या क्रमाने −1, −2, −3,... अशा असतात.

समीर : संख्यारेषेवर ऋण संख्या दाखवता येतात का ?

दादा : हो, तर ! शून्याच्या उजवीकडे 1, 2, 3,... एकक अंतरावर 1, 2, 3,... या संख्या असतात. शून्याच्या डावीकडे 1, 2, 3, ... एकक अंतरावर −1, −2, −3, ... या संख्या असतात त्यांना **ऋण संख्या** म्हणतात. संख्यारेषेवर उजवीकडील 1, 2, 3... या संख्यांना **धन संख्या** म्हणतात. त्या 1, 2, 3,... प्रमाणेच +1, +2, +3,... अशा देखील लिहिता येतात.

सलमा : तापमापीवर धन संख्या शून्याच्या वर, तर ऋण संख्या शून्याच्या खाली तसेच संख्यारेषेवर धन संख्या शून्याच्या उजवीकडे, तर ऋण संख्या शून्याच्या डावीकडे असतात, म्हणजे धन व ऋण संख्या शून्याच्या विरुद्ध दिशांना असतात का ?

दादा : अगदी बरोबर !

समीर : मग समुद्रसपाटीपासूनची डोंगराची उंची धन संख्येने, तर समुद्रतळाची खोली ऋण संख्येने दाखवायची हे बरोबर आहे का?

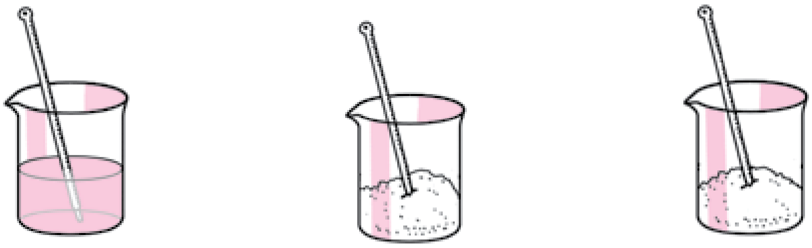
दादा : तुझंही बरोबर ! शाब्बास !

सांभाळा बरे !

व्यवहारात धन संख्येच्या आधी '+' हे चिन्ह देत नाहीत, पण ऋण संख्येचे '−' हे चिन्ह मात्र लिहावेच लागते तसेच शून्याला कोणतेही चिन्ह देत नाहीत.

हे करून पाहा.

एका भांड्यात गरम पाणी, दुसऱ्या भांड्यात बर्फाचा चुरा आणि तिसऱ्या भांड्यात बर्फाचा चुरा व मीठ यांचे मिश्रण घ्या. एक तापमापी घेऊन शिक्षकांच्या मदतीने तिन्ही भांड्यांतील पदार्थांचे तापमान मोजा आणि त्यांची नोंद करा.



गरम पाणी | बर्फाचा चुरा | बर्फाचा चुरा व मीठ

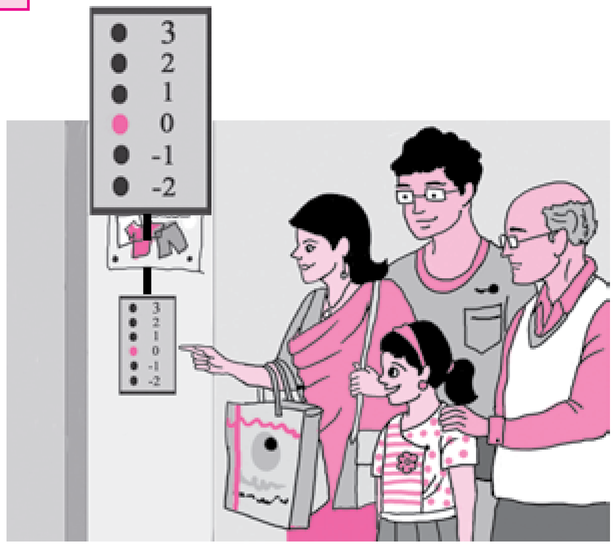
जाणून घेऊया.

पूर्णांक संख्या

धन संख्या, शून्य व ऋण संख्या मिळून संख्यांचा जो समूह तयार होतो, त्याला पूर्णांक संख्यासमूह म्हणतात.

गणित माझा सोबती : जत्रेमध्ये, लिफ्टमध्ये.

वरील कुल्फीवाल्याचे चित्र पाहा. कुल्फीवाला बर्फ व मिठाच्या मिश्रणात कुल्फीचे साचे का ठेवत असेल ?



लिफ्टमधील बटणांना तळमजल्यासाठी 0 (शून्य), तर तळमजल्याच्या खालील मजल्यांना −1 व −2 असे क्रमांक दिलेले असतात.

जाणून घेऊया.

संख्यारेषेवर पूर्णांक संख्या दाखवणे

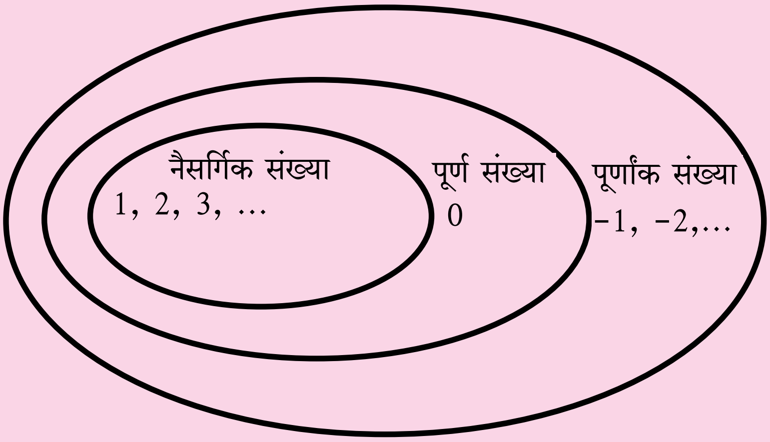
संख्यारेषेवर ज्या बिंदूशी 0 ही संख्या दाखवली जाते, त्या बिंदूला आरंभबिंदू म्हणतात. 0 च्या उजवीकडे व डावीकडे समान अंतरांवर बिंदू दर्शवतात. उजवीकडील बिंदूंनी दाखवलेल्या संख्या धन व डावीकडील संख्या ऋण मानतात.

−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7

ऋण संख्या आरंभबिंदू धन संख्या

उदा. संख्यारेषेवर −7 व +8 या संख्या दाखवा.

−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8



सांगा पाहू !

माझा सहावीचा **वर्ग** माझ्या शाळेचा भाग आहे. माझी **शाळा** आमच्या गावात आहे. माझे **गाव** तालुक्याचा एक भाग आहे. तसेच **तालुका** जिल्ह्याचा, **जिल्हा** महाराष्ट्र राज्याचा एक भाग आहे.

याप्रमाणे संख्यासमूहांच्या बाबतीत काय सांगता येईल ?

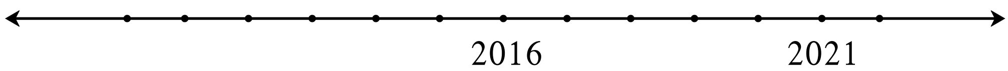
सरावसंच 4

1. खालील संख्यांचे ऋण संख्या व धन संख्या असे वर्गीकरण करा.
   -5, +4, -2, 7, +26, -49, -37, 19, -25, +8, 5, -4, -12, 27
2. खाली काही शहरांचे तापमान दिले आहे. चिन्हांचा वापर करून त्यांचे लेखन करा.

स्थान	सिमला	लेह	दिल्ली	नागपूर
तापमान	0° च्या खाली 7 °C	0° च्या खाली 12 °C	0° च्या वर 22 °C	0° च्या वर 31 °C

3. खालील उदाहरणातील संख्या, चिन्हांचा उपयोग करून लिहा.
   (1) एक पाणबुडी समुद्रसपाटीपासून 512 मीटर अंतर खोलीवर आहे.
   (2) हिमालयातील सर्वांत उंच शिखर माउंट एव्हरेस्टची उंची समुद्रसपाटीपासून 8848 मीटर आहे.
   (3) जमिनीपासून 120 मीटर अंतरावर उडणारा पतंग.
   (4) भुयार जमिनीखाली 2 मीटर खोल आहे.

गणित माझा सोबती : मैदानावर.



- मैदानावर इसवी सन 2000 ते 2024 ही वर्षे दर्शवणारी कालरेषा तयार करावी. एका विद्यार्थ्यास चालू सालावर उभे करून खालील प्रश्न विचारावेत.
  (1) खेळताना त्याचे वय काय आहे ? (2) 5 वर्षांपूर्वी साल कोणते होते व त्याचे वय किती होते ?
  (3) विद्यार्थी दहावीत कोणत्या साली जाईल व तेव्हा त्याचे वय किती असेल ?

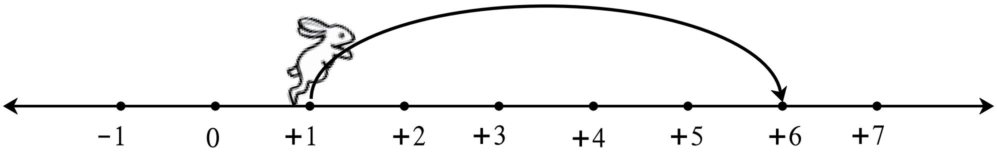
विद्यार्थ्यांने कालरेषेवर योग्य दिशेने व योग्य एकक चालावे व अशा प्रश्नांची उत्तरे शोधावीत.

- मैदानावर कालरेषा तयार करताना प्रत्येक एकक हा 100 वर्षांचा घ्यावा. मग त्यावर 0 सालापासून इसवी सन 2100 पर्यंत कालमापन करता येईल. इतिहासातील महत्त्वाच्या घटना त्या त्या शतकामध्ये दाखवाव्यात.

पूर्णांक संख्यांची बेरीज

संख्यारेषेवर सशाने उजव्या बाजूला मारलेल्या उड्या धन संख्यांनी, तर डाव्या बाजूला मारलेल्या उड्या ऋण संख्यांनी दाखवू.

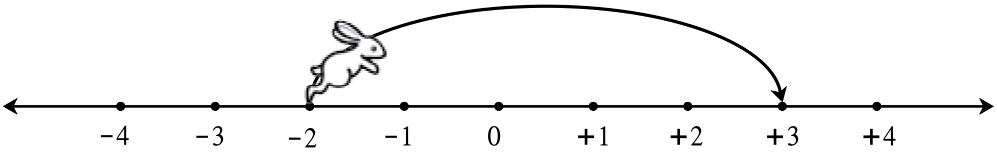
कृती :



- सुरुवातीला ससा ____ या संख्येवर होता.
- त्याने ____ एककाची उडी उजवीकडे मारली.
- आता तो ____ संख्येवर पोहोचला.

$$1 + 5 = (+1) + (+5) = +6$$

कृती :



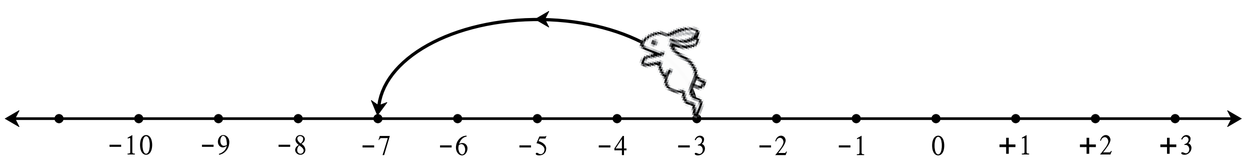
- सुरुवातीला ससा ____ या संख्येवर होता.
- त्याने ____ एककाची उडी उजवीकडे मारली.
- आता तो ____ या संख्येवर पोहोचला.

$$(-2) + (+5) = +3$$

हे मला समजले.

कोणत्याही संख्येत एखादी धन संख्या मिळवणे म्हणजे संख्यारेषेवर त्या संख्येपासून उजवीकडे तेवढे एकक पुढे जाणे.

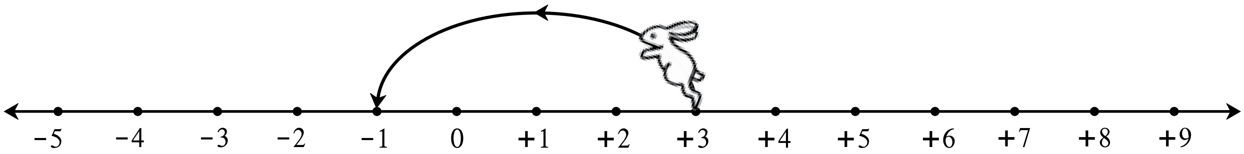
कृती :



- ससा सुरुवातीला ____ या संख्येवर आहे.
- त्याने ____ एककाची उडी डावीकडे मारली.
- आता तो ____ संख्येवर पोहोचला.

$$(-3) + (-4) = -7$$

कृती :



- ससा सुरुवातीला [ ] या संख्येवर होता.
- त्याने [ ] एककाची उडी डावीकडे मारली.
- आता तो [ ] संख्येवर पोहोचला.

$$(+3) + (-4) = -1$$

हे मला समजले.

कोणत्याही संख्येत ऋण संख्या मिळवणे म्हणजे संख्यारेषेवर त्या संख्येपासून तेवढे एकक डावीकडे जाणे किंवा तेवढे एकक मागे जाणे म्हणजेच वजा करणे.

चला, चर्चा करूया.

पूर्णांक संख्यांची बेरीज व वजाबाकी ही आपण मिळवलेली रक्कम व खर्च केलेली रक्कम यांच्या साहाय्याने समजावून घेऊ.

दादा : आपल्याजवळ असलेली रक्कम किंवा आपण मिळवलेली रक्कम धन संख्येने दाखवू व कर्जाऊ घेतलेली किंवा खर्च केलेली रक्कम ऋण संख्येने दाखवू.

अनिल : माझ्याजवळ 5 रुपये आहेत, म्हणजे +5 ही संख्या आहे. मला आईने 3 रुपये बक्षीस दिले. ती संख्या +3 आहे. आता माझ्याजवळ एकूण 8 रुपये झाले.
$5 + 3 = (+5) + (+3) = +8$

दादा : धन संख्यांची बेरीज तुम्हांला माहीत आहे. आता आपण ऋण संख्यांचाही विचार करू. सुनिता तुला मी पेन घेण्यासाठी 5 रुपये उसने दिले, तर तू ते कसे दाखवशील ?

सुनिता : माझ्याजवळची रक्कम मी ऋण पाच म्हणजे − 5 असे लिहून दाखवेन.

दादा : मी तुला अजून 3 रुपये उसने दिले, तर तुझ्यावर एकूण किती कर्ज (ऋण) होईल ?

सुनिता : $(-5) + (-3) = -8$ म्हणजे एकूण आठ रुपये कर्ज (ऋण) झाले.

दादा : तुझ्यावर 8 रुपयांचे कर्ज आहे. तुला आईने 2 रुपये खाऊसाठी दिले, म्हणजे तुझ्याजवळ + 2 रुपये आले. आता तू पूर्वी उसने घेतले होते त्यांपैकी 2 रुपयांचे कर्ज फेडलेस, तर तुझ्यावर किती रुपयांचे कर्ज राहील ?

सुनिता : $(-8) + (+2) = -6$ म्हणजे मला अजून 6 रुपये कर्ज फेडायचे आहे.

दादा : अनिल, तुझ्याजवळ 8 रुपये आहेत म्हणजे +8 रुपये आहेत. त्यांपैकी 3 रुपये तू पेन्सिल घेण्यास खर्च केलेस, तर तुझ्याजवळ किती रुपये राहतील ?

अनिल : $(+8) + (-3) = +5$.

दादा : मिळवणे आणि खर्च करणे या बाबींचा विचार करून पूर्णांक संख्यांची बेरीज कशी करायची हे आपण पाहिले.

जसे, (+5) + (+3) = +8 आणि (-5) + (-3) = -8

(-8) + (+2) = -6 आणि (+8) + (-3) = +5

हे मला समजले.

- **समान चिन्ह असलेल्या पूर्णांक संख्यांची बेरीज करताना चिन्हाचा विचार न करता संख्यांची बेरीज करावी व येणाऱ्या बेरजेला समान असलेले चिन्ह द्यावे.**
- **भिन्न चिन्ह असलेल्या पूर्णांक संख्यांची बेरीज करताना चिन्हाचा विचार न करता मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करावी व येणाऱ्या वजाबाकीला मोठ्या संख्येचे चिन्ह द्यावे.**

सरावसंच 5

1. बेरीज करा.

(1) 8 + 6

(2) 9 + (-3)

(3) 5 + (-6)

(4) -7 + 2

(5) -8 + 0

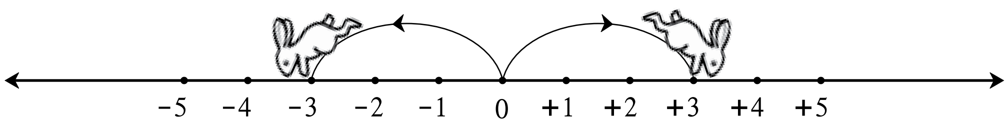
(6) -5 + (-2)

2. खालील सारणी पूर्ण करा.

+	8	4	-3	-5
-2	-2 + 8 = +6			
6				
0				
-4				

जाणून घेऊया.

विरुद्ध संख्या



ससा जेव्हा 0 पासून उजवीकडे 3 एककांची उडी मारतो तेव्हा तो +3 या संख्येवर जातो आणि जेव्हा तो 0 पासून डावीकडे 3 एककांची उडी मारतो तेव्हा तो -3 या संख्येवर जातो.

0 पासून दोन्ही अंतरे समान आहेत. फक्त उड्या मारलेल्या दिशा एकमेकींच्या विरुद्ध आहेत, म्हणजेच +3 आणि -3 या परस्परांच्या विरुद्ध संख्या आहेत.

विरुद्ध संख्या शून्यापासून सारख्याच अंतरावर आणि विरुद्ध दिशांना असतात.

चित्रात जर सशाने 0 पासून डावीकडे 5 एककाची उडी मारली, तर तो कोठे पोहोचेल ?

आता सशाने -5 पासून 5 एककाची उडी उजवीकडे मारली, तर तो कोठे पोहोचेल ?

(-5) + (+5) = 0 आता (+5) + (-5) = ?

दोन विरुद्ध संख्यांची बेरीज शून्य असते.

सरावसंच 6

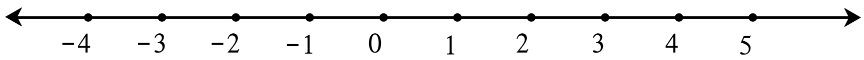
1. खालील संख्यांच्या विरुद्ध संख्या लिहा.

संख्या	47	+52	-33	-84	-21	+16	-26	80
विरुद्ध संख्या								

जाणून घेऊया.

पूर्णांक संख्यांचा लहान-मोठेपणा

संख्यारेषेवर कोणत्याही संख्येत 1 मिळवला, की लगतची उजव्या बाजूची संख्या मिळते याचा अनुभव आपण आधी घेतला आहे. ऋण संख्यांच्या बाबतीतही हे अनुभवा. जसे, -4 + 1 = -3



- 4 < - 3 < - 2 < - 1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5.

आता आपण धनसंख्या, शून्य व ऋण संख्या विचारात घेऊन त्यांच्यामधील लहान-मोठेपणा ठरवू शकतो.

जसे, 4 [>] -3   4 [>] 3   0 [>] -1   -2 [>] -3   -12 [<] 7

हे मला समजले.

संख्यारेषेवरील उजवीकडील प्रत्येक संख्या ही तिच्या लगतच्या डावीकडील संख्येपेक्षा 1 ने मोठी असते.

सरावसंच 7

1. खालील चौकटींत > , < , = यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

(1) -4 ☐ 5	(2) 8 ☐ - 10	(3) + 9 ☐ + 9	(4) -6 ☐ 0
(5) 7 ☐ 4	(6) 3 ☐ 0	(7) -7 ☐ 7	(8) -12 ☐ 5
(9) -2 ☐ -8	(10) -1 ☐ -2	(11) 6 ☐ -3	(12) -14 ☐ -14

जाणून घेऊया.

पूर्णांक संख्यांची वजाबाकी

ताई : अनिल, समजा तुझ्यावर 8 रुपयांचे कर्ज आहे. तू 5 रुपये मिळवलेस म्हणजे कमावलेस तर तू प्रथम कर्ज कमी करतोस, म्हणजे तुला जेवढे पैसे मिळाले तेवढे कर्ज कमी झाले. मिळवलेले 5 रुपये म्हणजे 5 रुपयांचे कर्ज कमी झाले किंवा वजा झाले.

हे गणिती भाषेत आपण असे लिहितो. - (-5) = (+ 5)

आता तुझे 5 रुपयांचे ऋण (कर्ज) कमी होऊन फक्त 3 रुपये ऋण (कर्ज) राहिले.

(-8) - (-5) = (-8) + 5 = -3

8 + (-5) = 8 - 5 = 3 हे आपल्याला माहीत आहेच.

पूर्णांक संख्यांची वजाबाकी खालील उदाहरणांवरून समजून घ्या.

(−9) − (−4)	(−4) − (−9)	(+9) − (+4)	(+9) − (−4)
= (−9) + 4	= (−4) + 9	= (+9) + (−4)	= (+9) + 4
= −9 + 4	= −4 + 9	= +9 − 4	= +9 + 4
= −5	= +5	= +5	= +13

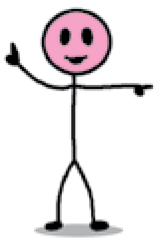
हे मला समजले.

एखाद्या संख्येतून दुसरी संख्या वजा करणे म्हणजे दुसऱ्या संख्येची विरुद्ध संख्या पहिल्या संख्येत मिळवणे. जसे : 8 − (−6) = 8 + (+6)

सरावसंच 8

1. उभ्या स्तंभातील संख्यांतून आडव्या स्तंभातील संख्या वजा करा. रिकाम्या चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

−	6	9	−4	−5	0	+7	−8	−3
3	3 − 6 = −3							
8				8 − (−5) = 13				
−3								
−2								



पूर्णांकाचा खेळ

आपापल्या सोंगट्या 'सुरुवात' या चौकटीवर ठेवा. फासा टाका. फाशावर आलेले दान पाहा. फाशावर आलेले दान ही धन संख्या असते. त्या दानाएवढी घरे मोजून सोंगटी पुढे सरकवा. त्या चौकटीत जर उदाहरण दिले असेल तर ते सोडवा. आलेले उत्तर धन संख्येत असेल तर सोंगटी तेवढी घरे पुढे न्या. आलेले उत्तर ऋण संख्येत असेल तर तेवढी घरे सोंगटी मागे न्या.

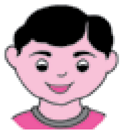
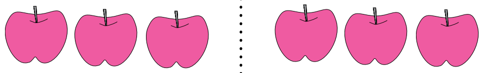
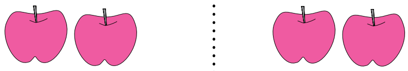
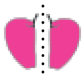
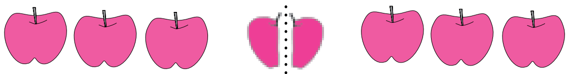
समजा, आपण 18 व्या घरात आलो तर त्यातील उदाहरणाचे (−4 + 2 = −2) हे उत्तर येईल. आता सोंगटी दोन घरे मागे म्हणजे 16 वर सरकवा. जो खेळाडू सर्वांत आधी 100 वर पोहोचेल तो जिंकला.

या खेळासाठी आखलेली चौकट मलपृष्ठावर दिली आहे.

4 अपूर्णांकांवरील क्रिया

जरा आठवूया.

दिलेली सफरचंदे आपण दोन मुलांमध्ये समान वाटू.

सफरचंद	मुले		
6	2		$6 \div 2 = 3$
4	2		$4 \div 2 = 2$
1	2		$1 \div 2 = \frac{1}{2}$
7	2		$7 \div 2 = \frac{7}{2}$

जाणून घेऊया.

अंशाधिक अपूर्णांकाचे पूर्णांकयुक्त अपूर्णांकात रूपांतर

उदा. 7 सफरचंदे 2 जणांत समान वाटल्यावर प्रत्येकाच्या वाट्याला किती सफरचंदे येतील ?

$\frac{7}{2} = 7 \div 2$

3 भागाकार

भाजक 2) 7 भाज्य

− 6

1 बाकी

$\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

प्रत्येकाच्या वाट्याला 3 पूर्ण व $\frac{1}{2}$ सफरचंदे येतील.

सांभाळा बरे !

आपण भागाकार करताना भाजकापेक्षा बाकी कमी येईल अशी काळजी घेतो. त्यामुळे पूर्णांकयुक्त अपूर्णांकांच्या अपूर्णांकी भागात अंश छेदापेक्षा लहान येतो.

जाणून घेऊया.

पूर्णांकयुक्त अपूर्णांकाचे अंशाधिक अपूर्णांकात रूपांतर

उदा. $3\frac{2}{5}$ हा पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक आहे. याचे रूपांतर अंश-छेद या रूपात करायचे आहे.

$$3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{3}{1} + \frac{2}{5} = \frac{3\times5}{1\times5} + \frac{2}{5} = \frac{3\times5+2}{5} = \frac{15+2}{5} = \frac{17}{5}$$

सरावसंच 9

1. अंशाधिक अपूर्णांकात रूपांतर करा.

   (i) $7\frac{2}{5}$ (ii) $5\frac{1}{6}$ (iii) $4\frac{3}{4}$ (iv) $2\frac{5}{9}$ (v) $1\frac{5}{7}$

2. पूर्णांकयुक्त अपूर्णांकात रूपांतर करा.

   (i) $\frac{30}{7}$ (ii) $\frac{7}{4}$ (iii) $\frac{15}{12}$ (iv) $\frac{11}{8}$ (v) $\frac{21}{4}$ (vi) $\frac{20}{7}$

3. पुढील उदाहरणे अपूर्णांक रूपात लिहा.

   (i) 9 किलोग्रॅम तांदूळ 5 जणांत समान वाटले, तर प्रत्येकाला किती किलोग्रॅम तांदूळ मिळतील ?

   (ii) 5 सारखे शर्ट शिवण्यासाठी 11 मीटर कापड लागते, तर एका शर्टासाठी किती मीटर कापड लागेल ?

जाणून घेऊया.

पूर्णांकयुक्त अपूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी

उदा. (1) बेरीज करा. $5\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4}$

रीत I

$$5\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} = 5 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$
$$= 7 + \frac{1\times2}{2\times2} + \frac{3}{4}$$
$$= 7 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}$$
$$= 7 + \frac{2+3}{4} = 7 + \frac{5}{4}$$
$$= 7 + 1 + \frac{1}{4} = 8\frac{1}{4}$$

रीत II

$$5\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} = \frac{5\times2+1}{2} + \frac{2\times4+3}{4}$$
$$= \frac{11}{2} + \frac{11}{4}$$
$$= \frac{11\times2}{2\times2} + \frac{11}{4}$$
$$= \frac{22}{4} + \frac{11}{4} = \frac{33}{4}$$
$$= 8\frac{1}{4}$$

उदा. (2) वजाबाकी करा. $3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{7}$

रीत I

$$3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{7} = (3-2) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{7}\right)$$

$$= 1 + \frac{2\times 7}{5\times 7} - \frac{1\times 5}{7\times 5}$$

$$= 1 + \frac{14}{35} - \frac{5}{35}$$

$$= 1 + \frac{9}{35} = 1\frac{9}{35}$$

रीत II

$$3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{7} = \frac{17}{5} - \frac{15}{7}$$

$$= \frac{17\times 7}{5\times 7} - \frac{15\times 5}{7\times 5}$$

$$= \frac{119}{35} - \frac{75}{35} = \frac{119-75}{35}$$

$$= \frac{44}{35} = 1\frac{9}{35}$$

विचार करा.

$4\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}$ ही वजाबाकी कशी करावी ? ती वजाबाकी $[4 - 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}]$ अशी आहे का?

सरावसंच 10

1. बेरीज करा.

(i) $6\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3}$ (ii) $1\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2}$ (iii) $5\frac{1}{5} + 2\frac{1}{7}$ (iv) $3\frac{1}{5} + 2\frac{1}{3}$

2. वजाबाकी करा.

(i) $3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}$ (ii) $5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3}$ (iii) $7\frac{1}{8} - 6\frac{1}{10}$ (iv) $7\frac{1}{2} - 3\frac{1}{5}$

3. सोडवा.

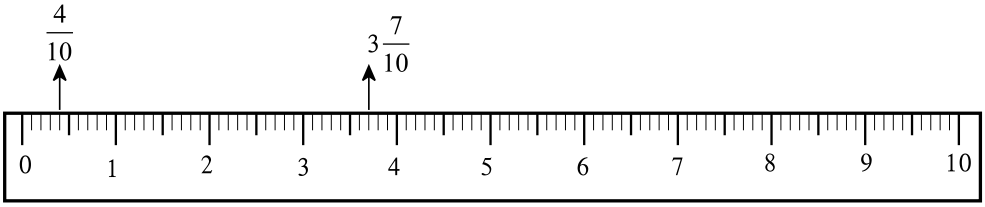
(1) सुयशने $2\frac{1}{2}$ किलोग्रॅम आणि आशिषने $3\frac{1}{2}$ किलोग्रॅम साखर आणली, तर दोघांनी मिळून किती साखर आणली ? साखरेचा भाव 32 रुपये प्रतिकिलो असेल, तर साखरेची एकूण किंमत किती ?

(2) आराधनाने आपल्या परसबागेतील $\frac{2}{5}$ भागात बटाट्याची लागवड केली. $\frac{1}{3}$ भागात पालेभाज्यांची लागवड केली. उरलेल्या भागात वांग्याची लागवड केली, तर किती भागात वांग्याची लागवड केली ?

(3)* संदीपने एका रिकाम्या हौदात $\frac{4}{7}$ भाग इतके पाणी भरले. त्यानंतर त्या हौदात रमाकांतने $\frac{1}{4}$ भाग इतके पाणी भरले. उमेशने त्याच हौदाचा $\frac{3}{14}$ भाग पाणी बागेतील झाडांना दिले. हौदाची पूर्ण क्षमता 560 लीटरची असेल, तर हौदात किती लीटर पाणी शिल्लक असेल ?

जाणून घेऊया.

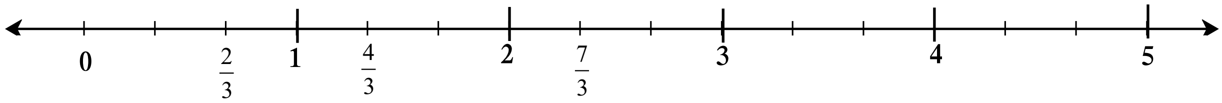
संख्यारेषेवर अपूर्णांक दाखवणे



$\frac{4}{10}$ व $3\frac{7}{10}$ हे अपूर्णांक संख्यापट्टीवर दाखवणे सोपे आहे कारण मोजपट्टीवर प्रत्येक सेंटिमीटरचे दहा समान भाग असतात. एककात शून्यापासून चौथा भाग $\frac{4}{10}$ हा अपूर्णांक दाखवतो. 3 व 4 यांच्यामधील दहा समान भागांपैकी 3 च्या पुढील 7 वी खूण ही $3\frac{7}{10}$ हा पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक दाखवते.

उदा. संख्यारेषेवर $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{3}$ हे अपूर्णांक दाखवू.

खालील पट्टीवर प्रत्येक एककाचे 3 समान भाग केले आहेत.



हे मला समजले.

एखादा अपूर्णांक संख्यारेषेवर दाखवायचा असेल, तर संख्यारेषेवर प्रत्येक एककाचे अपूर्णांकाच्या छेदाइतके समान भाग करावे लागतात.

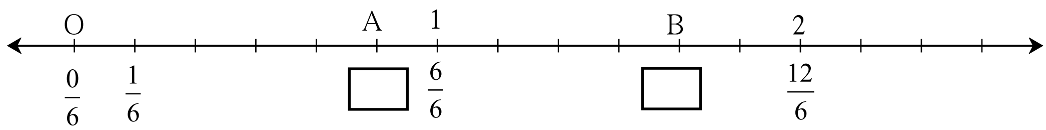
विचार करा.

संख्यारेषेवर $\frac{3}{10}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{19}{40}$ हे अपूर्णांक दाखवण्यासाठी किती मोठा एकक घ्यावा ?

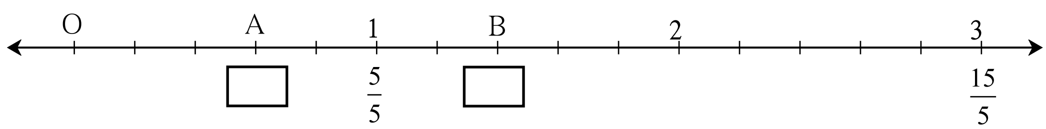
सरावसंच 11

1. खालील रेषांवर A व B बिंदू कोणते अपूर्णांक दर्शवतात ते रिकाम्या चौकटींत लिहा.

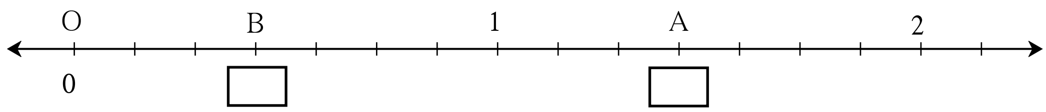
(1)



(2)



(3)



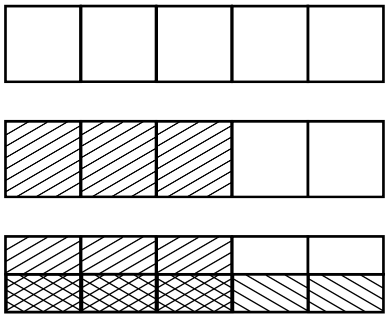
2. संख्यारेषेवर पुढील अपूर्णांक दाखवा.

(1) $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{5}$, $2\frac{3}{5}$ (2) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $2\frac{1}{4}$

जाणून घेऊया.

अपूर्णांकांचा गुणाकार

$\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$ हा गुणाकार आयताकृती पट्टीच्या साहाय्याने कसा केला आहे ते पाहा.



- एक आयताकृती पट्टी घेऊन तिचे उभ्या रेषा काढून 5 समान भाग करा.
- $\frac{3}{5}$ हा अपूर्णांक दर्शवणारा भाग रेखांकित करा.
- $\frac{3}{5}$ चा $\frac{1}{2}$ एवढा भाग दाखवायचा आहे म्हणून त्याच पट्टीचे 2 समान भाग करण्यासाठी मधोमध आडवी रेघ काढा.
- त्या आडव्या 2 भागांपैकी 1 भाग वेगळ्या प्रकारे रेखांकित करा.

आपण पूर्ण पट्टीचे 2 समान भाग केले. त्या वेळी $\frac{3}{5}$ भागाचेही 2 समान भाग केले. त्यांतील 1 भाग घेण्यासाठी दोनदा रेखांकित केलेला भाग विचारात घ्या.

एकूण समान चौकटी 10 झाल्या. त्यांपैकी 3 चौकटी दोनदा रेखांकित केलेल्या आहेत. या चौकटी म्हणजे दोनदा रेखांकित केलेला भाग अपूर्णांक रूपात $\frac{3}{10}$ आहे. $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

आपण वरील गुणाकार पुढीलप्रमाणे करू शकतो. $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{5 \times 2} = \frac{3}{10}$

हे मला समजले.

दोन अपूर्णांकांचा गुणाकार करताना अंशांचा गुणाकार अंशस्थानी व छेदांचा गुणाकार छेदस्थानी लिहितात.

उदा. सुलोचनाबाईंची 42 एकर शेती आहे. त्यांनी त्या शेताच्या $\frac{2}{7}$ भागात गहू लावला, तर त्यांनी किती एकर जागेत गहू लावला?

42 चा $\frac{2}{7}$ काढायचा आहे. $\therefore \frac{42}{1} \times \frac{2}{7} = \frac{42 \times 2}{1 \times 7} = \frac{6 \times 7 \times 2}{7} = 12$

सुलोचनाबाईंनी 12 एकर जागेत गहू लावला.

सरावसंच 12

1. गुणाकार करा.

(i) $\frac{7}{5} \times \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{6}{7} \times \frac{2}{5}$ (iii) $\frac{5}{9} \times \frac{4}{9}$ (iv) $\frac{4}{11} \times \frac{2}{7}$

(v) $\frac{1}{5} \times \frac{7}{2}$ (vi) $\frac{9}{7} \times \frac{7}{8}$ (vii) $\frac{5}{6} \times \frac{6}{5}$ (viii) $\frac{6}{17} \times \frac{3}{2}$

2. अशोकरावांनी आपल्या 21 एकर शेताच्या $\frac{2}{7}$ भागात केळीची लागवड केली, तर एकूण केळी लागवडीचे क्षेत्र किती ?

3*. लष्करातील एकूण सैनिकांपैकी $\frac{4}{9}$ भाग सैनिक उत्तर सीमेवर संरक्षण करत आहेत. या सैनिकांच्या संख्येच्या तिसऱ्या भागाएवढे सैनिक ईशान्येकडील भागात संरक्षणासाठी कार्यरत आहे. जर उत्तर सीमेवर कार्यरत असणाऱ्या सैनिकांची संख्या 540000 असेल, तर ईशान्येकडील सैनिकांची संख्या किती असेल ?

जाणून घेऊया.

गुणाकार व्यस्त

हे गुणाकार पाहा.

(1) $\frac{5}{6} \times \frac{6}{5} = \frac{30}{30} = 1$ (2) $4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{1} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

(3) $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{6} = 1$ (4) $\frac{71}{3} \times \frac{3}{71} = 1$

या सर्व गुणाकारांत काय विशेष दिसते ?

दिलेला अपूर्णांक आणि त्याचा अंश व छेद यांची अदलाबदल करून मिळणारा अपूर्णांक यांचा गुणाकार 1 आहे. अशा अपूर्णांकांच्या जोडीला नाव आहे. ही गुणाकार व्यस्तांची जोडी आहे.

उदा. $\frac{5}{6}$ या अपूर्णांकाचा गुणाकार व्यस्त $\frac{6}{5}$ आहे. 4 चा म्हणजेच $\frac{4}{1}$ चा गुणाकार व्यस्त $\frac{1}{4}$ आहे.

हे मला समजले.

जेव्हा दोन संख्यांचा गुणाकार 1 असतो तेव्हा त्या संख्या एकमेकींच्या गुणाकार व्यस्त असतात.

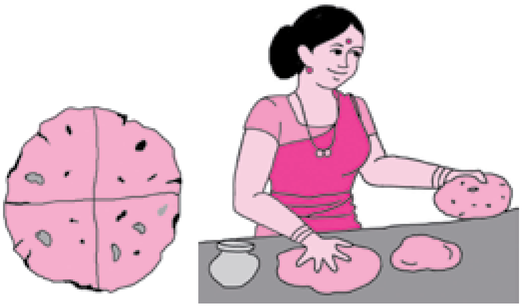
विचार करा.

(1) 1 चा गुणाकार व्यस्त कोणता ? (2) 0 चा गुणाकार व्यस्त आहे का ?

जाणून घेऊया.

अपूर्णांकांचा भागाकार

उदा. एक भाकरी आहे. प्रत्येकाला चतकोर भाकरी द्यायची आहे. तर ती किती जणांना पुरेल ?



चतकोर (पाव) म्हणजे $\frac{1}{4}$

चित्रात दाखवल्याप्रमाणे एका पूर्ण भाकरीचे चार चतकोर होतील व ती भाकरी 4 जणांना पुरेल.

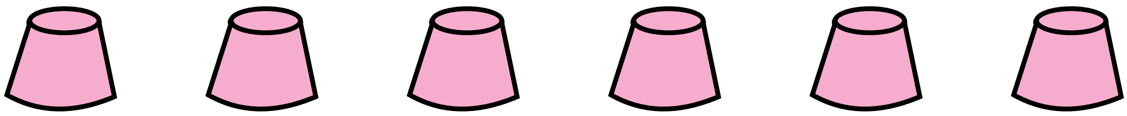
हेच आपण $4 \times \frac{1}{4} = 1$ असे लिहू शकतो.

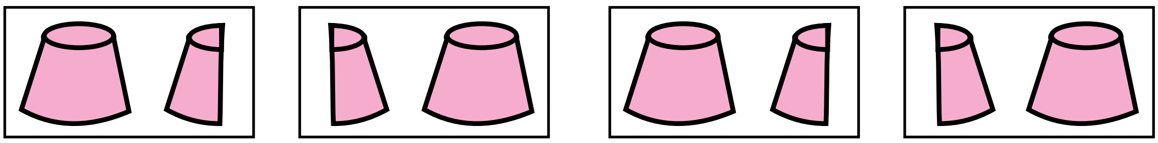
आता अपूर्णांकाच्या भागाकाराचे रूपांतर गुणाकारात करू.

$1 \div \frac{1}{4} = 4 = 1 \times \frac{4}{1}$

उदा. गुळाची प्रत्येक ढेप एक किलोग्रॅमची अशा सहा ढेपा आहेत. एका कुटुंबाला महिन्याला दीड किलो गूळ लागत असेल, तर या ढेपा किती कुटुंबांना पुरतील ?

दीड किलोग्रॅम म्हणजे एक पूर्ण व अर्धा $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$





दिलेला गूळ किती कुटुंबांना पुरेल हे काढण्यासाठी भागाकार करू.

$6 \div \frac{3}{2} = \frac{6}{1} \div \frac{3}{2} = \frac{6}{1} \times \frac{2}{3} = 4$ म्हणून 6 ढेपा चार कुटुंबांना पुरतील.

उदा. $12 \div 4 = \frac{12}{1} \times \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$

उदा. $\frac{5}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{7 \times 2} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$

हे मला समजले.

एखाद्या संख्येला अपूर्णांकाने भागणे म्हणजे त्या संख्येला त्या अपूर्णांकाच्या गुणाकार व्यस्ताने गुणणे.

सरावसंच 13

1. खालील संख्यांचे गुणाकार व्यस्त लिहा.

(i) 7 (ii) $\frac{11}{3}$ (iii) $\frac{5}{13}$ (iv) 2 (v) $\frac{6}{7}$

2. खालील अपूर्णांकांचा भागाकार करा.

(i) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{5}{9} \div \frac{3}{2}$ (iii) $\frac{3}{7} \div \frac{5}{11}$ (iv) $\frac{11}{12} \div \frac{4}{7}$

3.* 'स्वच्छ भारत' अभियानामध्ये 420 विद्यार्थ्यांनी सहभाग घेतला. त्यांनी सेवाग्राम या गावाचा $\frac{42}{75}$ भाग स्वच्छ केला, तर प्रत्येक विद्यार्थ्याने सेवाग्रामचा किती भाग स्वच्छ केला ?

रामानुजन चौरस

22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

- या चौरसातील आडव्या, उभ्या व तिरक्या ओळीतील चार-चार संख्यांची बेरीज करा.
- बेरीज किती येते ते पाहा.
- कशीही बेरीज केली तरी तेवढीच येते का ?
- काय वैशिष्ट्य जाणवले ?
- चौरसातील पहिल्या ओळीतील संख्या पाहा.
  22 - 12 - 1887
  या तारखेबद्दल माहिती मिळवा.

श्रेष्ठ भारतीय गणिती श्रीनिवास रामानुजन यांचे चरित्र मिळवा व वाचा.

5 दशांश अपूर्णांक

जरा आठवूया.

दशांश अपूर्णांक : बेरीज, वजाबाकी

पेन, वही, खोडरबर व रंगपेटी या वस्तू खरेदी करण्यासाठी नंदू दुकानात गेला. दुकानदाराने त्याला किमती सांगितल्या. पेनची किंमत साडेचार रुपये, तर खोडरबरची किंमत दीड रुपये, वहीची किंमत साडेसहा रुपये आणि रंगपेटीची किंमत पंचवीस रुपये पन्नास पैसे. नंदूने प्रत्येकी एक वस्तू खरेदी केली. त्याचे बिल तयार करा.

नंदूने दुकानदाराला 100 रुपयांची नोट दिली, तर त्याला किती रुपये परत मिळतील ?

आशय वस्तू भांडार

क्र. 87 दिनांक 11.1.16

नंदू

क्र.	तपशील	नग	किंमत
1	पेन	1	4.50
	एकूण		

100 − ☐ = ☐

नंदूला .... रुपये परत मिळतील.

जाणून घेऊया.

रुपये-पैसे, मीटर-सेमी ही एकके असलेली उदाहरणे सोडवताना आपण दोन दशांश स्थळांपर्यंतचे अपूर्णांक वापरले आहेत. किलोग्रॅम-ग्रॅम, किलोमीटर-मीटर, लीटर-मिलीलीटर ही एकके असणारी उदाहरणे सोडवताना तीन दशांश स्थळांपर्यंतचे अपूर्णांक वापरावे लागतात.

उदा. रेश्माने भाजी खरेदी केली. त्यामध्ये पाऊण किग्रॅ बटाटे, एक किग्रॅ कांदे, अर्धा किग्रॅ कोबी आणि पाव किग्रॅ टोमॅटो होते, तर तिच्या पिशवीतील भाज्यांचे एकूण वजन किती ?

हे आपल्याला माहीत आहे : 1 किग्रॅ = 1000 ग्रॅम, अर्धा किग्रॅ = 500 ग्रॅम,

पाऊण किग्रॅ = 750 ग्रॅम, पाव किग्रॅ = 250 ग्रॅम

आता भाज्यांचे एकूण वजन काढण्यासाठी ग्रॅमचे व किग्रॅचे एकक वापरून बेरीज करून पाहू.

	750	ग्रॅम बटाटे
+	1000	ग्रॅम कांदे
+	500	ग्रॅम कोबी
+	250	ग्रॅम टोमॅटो
	2500	ग्रॅम एकूण वजन

	0.750	किग्रॅ बटाटे
+	1.000	किग्रॅ कांदे
+	0.500	किग्रॅ कोबी
+	0.250	किग्रॅ टोमॅटो
	2.500	किग्रॅ एकूण वजन

पूर्णांकांची बेरीज व दशांश अपूर्णांकांची बेरीज यांतील सारखेपणा लक्षात घ्या.

भाज्यांचे एकूण वजन 2500 ग्रॅम म्हणजे $\frac{2500}{1000}$ किग्रॅ म्हणजेच 2.500 किग्रॅ आहे.

2.500 = 2.50 = 2.5 हे आपल्याला माहीत आहे.

रेश्माच्या पिशवीतील भाजीचे वजन 2.5 किग्रॅ आहे.

गणित माझा सोबती : बाजारात, दुकानात.

तुम्ही आई-बाबांबरोबर वही व पेन घेऊन बाजारात जा. आईने प्रत्येक भाजी किती वजनाची घेतली याची नोंद करा. भाज्यांचे एकूण वजन किती ते लिहा.

सरावसंच 14

1. 378.025 या संख्येतील प्रत्येक अंकाची स्थानिक किंमत सारणीत लिहा.

स्थान	शतक	दशक	एकक	दशांश	शतांश	सहस्रांश
	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
अंक	3	7	8	0	2	5
स्थानिक किंमत	300			$\frac{0}{10} = 0$		$\frac{5}{1000} = 0.005$

2. सोडवा.

(1) 905.5 + 27.197 (2) 39 + 700.65 (3) 40 + 27.7 + 2.451

3. वजाबाकी करा.

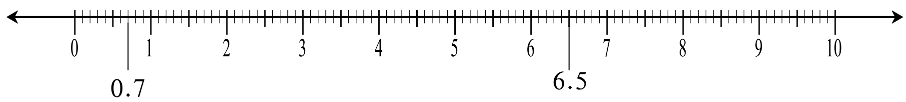
(1) 85.96 - 2.345 (2) 632.24 - 97.45 (3) 200.005 - 17.186

4. अविनाशने 42 किमी 365 मीटर प्रवास बसने, 12 किमी 460 मी प्रवास मोटारने आणि 640 मीटर प्रवास पायी केला, तर त्याने एकूण किती किमी प्रवास केला. (उत्तर दशांश अपूर्णांकांत लिहा.)
5. आयेशाने सलवारसाठी 1.80 मीटर, कुर्त्यासाठी 2.25 मीटर कापड खरेदी केले. कापडाचा दर 120 रुपये प्रति मीटर असेल, तर तिला दुकानदारास कापडासाठी किती रुपये द्यावे लागतील ?
6. सुजाताने बाजारातून 4.25 किग्रॅ वजनाचे कलिंगड आणले. त्यातील 1 किग्रॅ 750 ग्रॅम कलिंगड शेजारच्या मुलांना दिले, तर तिच्याकडे किती किलोग्रॅम कलिंगड शिल्लक राहिले ?
7. अनिता कारने ताशी 85.6 किमी वेगाने प्रवास करत होती. रस्त्यावर ‘कारची वेगमर्यादा ताशी 55 किमी’ अशी सूचना होती. तर तिने गाडीचा वेग कितीने कमी केल्यास वाहतुकीच्या नियमांचे पालन होईल ?

जरा आठवूया.

संख्यारेषेवर दशांश अपूर्णांक दर्शवणे

उदा. संख्यारेषेवर 0.7 व 6.5 या संख्या कशा दाखवल्या आहेत ते पाहा.



याप्रमाणे खालील संख्या संख्यारेषेवर दाखवा.

(1) 3.5 (2) 0.8 (3) 1.9 (4) 4.2 (5) 2.7

जाणून घेऊया.

व्यवहारी अपूर्णांकाचे दशांश अपूर्णांकांत रूपांतर

व्यवहारी अपूर्णांकांचा छेद 10 किंवा 100 असेल तर तो दशांश अपूर्णांकाच्या रूपात लिहिता येतो हे आपल्याला माहीत आहे.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$ या अपूर्णांकांचे दशांश अपूर्णांकात रूपांतर कसे करता येते ते आठवा.

अपूर्णांकाचा छेद 1000 असेल तर त्याचेही दशांश अपूर्णांकात रूपांतर करता येते; कसे ते पाहू.

व्यवहारी अपूर्णांकांचा छेद 10, 100, 1000 असेल तर –

(1) जर अंशस्थानी छेदस्थानातील शून्यांपेक्षा जास्त अंक असतील, तर उजवीकडून शून्यांच्या संख्येइतके अंक सोडून त्या आधी दशांशचिन्ह लिहावे लागते.

जसे, (1) $\frac{723}{10} = 72.3$ (2) $\frac{51250}{100} = 512.50$ (3) $\frac{5138}{1000} = 5.138$

(2) अंशस्थानी छेदस्थानातील शून्याइतकेच अंक असतील, तर अंशस्थानच्या संख्येच्या आधी दशांश चिन्ह देऊन, पूर्णांकाच्या जागी शून्य लिहावे.

जसे, (1) $\frac{7}{10} = 0.7$ (2) $\frac{54}{100} = 0.54$ (3) $\frac{725}{1000} = 0.725$

(3) अंशस्थानी छेदस्थानातील शून्यापेक्षा कमी अंक असतील, तर अंशाच्या आधी काही शून्ये देऊन एकूण अंक छेदातील शून्यांच्या संख्येएवढे करावेत. त्या आधी दशांशचिन्ह लिहावे व पूर्णांकाच्या जागी शून्य लिहावे.

जसे, (1) $\frac{8}{100} = \frac{08}{100} = 0.08$ (2) $\frac{8}{1000} = \frac{008}{1000} = 0.008$

जाणून घेऊया.

दशांश अपूर्णांकांचे व्यवहारी अपूर्णांकांत रूपांतर

(1) $26.4 = \frac{264}{10}$ (2) $0.04 = \frac{4}{100}$ (3) $19.315 = \frac{19315}{1000}$

हे मला समजले.

दशांश अपूर्णांकाचे व्यवहारी अपूर्णांकात रूपांतर करताना दिलेल्या दशांश अपूर्णांकातील दशांशचिन्हाचा विचार न करता मिळालेली संख्या व्यवहारी अपूर्णांकाच्या अंशस्थानी लिहितात व छेदस्थानी 1 हा अंक लिहून दिलेल्या संख्येतील दशांशचिन्हाच्या पुढे जेवढे अंक असतील तेवढी शून्ये 1 च्या पुढे लिहितात.

सरावसंच 15

1. चौकटींत योग्य संख्या भरा.

(1) $\frac{3}{5} = \frac{3\times\square}{5\times\square} = \frac{\square}{10} = \square$ (2) $\frac{25}{8} = \frac{25\times\square}{8\times125} = \frac{\square}{1000} = 3.125$

(3) $\frac{21}{2} = \frac{21\times\square}{2\times\square} = \frac{\square}{10} = \square$ (4) $\frac{22}{40} = \frac{11}{20} = \frac{11\times\square}{20\times5} = \frac{\square}{100} = \square$

2. व्यवहारी अपूर्णांकांचे दशांश अपूर्णांकांत रूपांतर करा.

(1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{4}{5}$ (3) $\frac{9}{8}$ (4) $\frac{17}{20}$ (5) $\frac{36}{40}$ (6) $\frac{7}{25}$ (7) $\frac{19}{200}$

3. खालील दशांश अपूर्णांक व्यवहारी अपूर्णांक रूपात लिहा.

(1) 27.5 (2) 0.007 (3) 90.8 (4) 39.15 (5) 3.12 (6) 70.400

जाणून घेऊया.

दशांश अपूर्णांकांचा गुणाकार

उदा. 1. 4.3 × 5 गुणाकार करा.

रीत I	रीत II	रीत III
$4.3 \times 5 = \frac{43}{10} \times \frac{5}{1}$ $= \frac{43 \times 5}{10 \times 1}$ $= \frac{215}{10}$ $4.3 \times 5 = 21.5$	(× | 4 | $\frac{3}{10}$) / (5 | 20 | $\frac{15}{10}$) / (| 20 | 1.5) 4.3 × 5 = 20 + 1.5 = 21.5	43 × 5 = 215 4.3 × 5 = 21.5

रीत II सारणी:

×	4	$\frac{3}{10}$
5	20	$\frac{15}{10}$
	20	1.5

उदा. 2. पेट्रोलचा दर प्रतिलीटर 62.32 रुपये आहे. सीमाला तिच्या स्कूटरमध्ये अडीच लीटर पेट्रोल भरायचे आहे. तिला किती रुपये द्यावे लागतील ? कोणती क्रिया करावी ?

रीत I

62.32 × 2.5 = ?

$62.32 \times 2.5 = \frac{6232}{100} \times \frac{25}{10}$

$= \frac{155800}{1000}$

= 155.800

सीमाला 155.80 रुपये द्यावे लागतील.

रीत II

$$\begin{array}{r} 6232 \\ \times\ 25 \\ \hline 155800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 62.32 \\ \times\ 2.5 \\ \hline 155.800 \end{array}$$

- आधी दशांशचिन्हाचा विचार न करता गुणाकार केला.
- नंतर गुणाकारातील एकक स्थानापासून सुरुवात करून गुण्य व गुणकातील एकूण दशांशस्थळे मोजून डावीकडे दशांशचिन्ह दिले.

सरावसंच 16

1. जर, 317 × 45 = 14265, तर 3.17 × 4.5 = ?
2. जर, 503 × 217 = 109151, तर 5.03 × 2.17 = ?
3. गुणाकार करा.
   (1) 2.7 × 1.4 (2) 6.17 × 3.9 (3) 0.57 × 2 (4) 5.04 × 0.7

4. विरेंद्रने 5.250 किग्रॅ वजनाची एक पिशवी याप्रमाणे 18 पिशव्या तांदूळ खरेदी केला, तर एकूण तांदूळ किती खरेदी केला? जर तांदळाचा दर 42 रुपये प्रतिकिग्रॅ असेल, तर त्याने किती रुपये दिले ?
5. वेदिकाजवळ एकूण 23.50 मीटर कापड आहे. तिने त्या कापडापासून समान आकाराचे 5 पडदे बनवले. जर प्रत्येक पडद्यास 4 मीटर 25 सेमी कापड लागते, तर तिच्याजवळ किती मीटर कापड शिल्लक राहील ?

जाणून घेऊया.

आपण पाहिले आहे, की $\frac{5}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{14}$

दशांश अपूर्णांकांचा भागाकार

(1) $6.2 \div 2 = \frac{62}{10} \div \frac{2}{1} = \frac{62}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{31}{10} = 3.1$

(2) $3.4 \div 5 = \frac{34}{10} \div \frac{5}{1} = \frac{34}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{34}{50} = \frac{34 \times 2}{50 \times 2} = \frac{68}{100} = 0.68$

(3) $4.8 \div 1.2 = \frac{48}{10} \div \frac{12}{10} = \frac{48}{10} \times \frac{10}{12} = 4$

सरावसंच 17

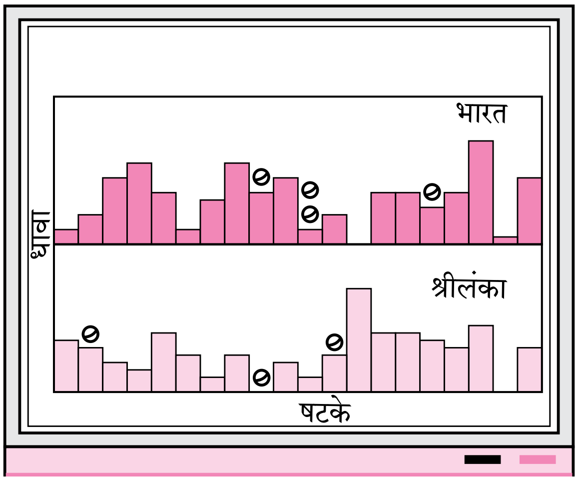
1. खालील भागाकार करा.
   (1) 4.8 ÷ 2 (2) 17.5 ÷ 5 (3) 20.6 ÷ 2 (4) 32.5 ÷ 25
2. रस्त्याची एकूण लांबी 4 किमी 800 मीटर आहे. रस्त्याच्या दुतर्फा दर 9.6 मीटर अंतरावर झाडे लावली, तर एकूण किती झाडे लागतील ?
3. प्रज्ञा दररोज नियमितपणे मैदानावरील वर्तुळाकार मार्गावरून चालण्याचा व्यायाम करते. जर ती दररोज 9 फेऱ्यांत एकूण 3.825 किमी अंतर चालते, तर एका फेरीत ती किती अंतर चालते ?
4. औषधनिर्मात्याने 0.25 क्विंटल हिरडा (औषधी वनस्पती) 9500 रुपयांना खरेदी केला, तर एक क्विंटल हिरड्याचा दर किती ? (1क्विंटल = 100 किलोग्रॅम)

गणिती गंमत!

हमीद : सलमा मला कोणतीही एक तीन अंकी संख्या सांग.
सलमा : ठीक आहे. ऐक, पाचशे सत्तावीस.
हमीद : आता त्या संख्येला तू प्रथम 7 ने गुण. आलेल्या गुणाकाराला 13 ने गुण. परत आलेल्या गुणाकाराला 11 ने गुण.
सलमा : हं, गुणले.
हमीद : तुझं उत्तर आहे. पाच लाख सत्तावीस हजार पाचशे सत्तावीस.
सलमा : हे कसं काय तू झटकन सांगितलंस ?
हमीद : तू आणखी दोन/तीन संख्या घे. हे गुणाकार कर व ओळख.

6 स्तंभालेख

जरा आठवूया.



शेजारील चित्राचे निरीक्षण करा आणि सांगा.

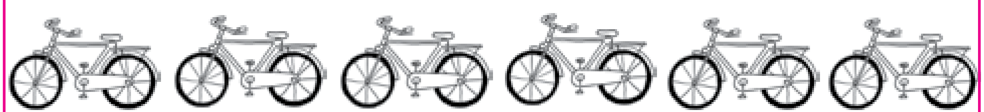
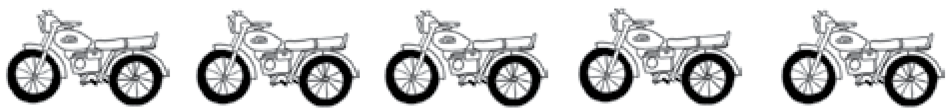
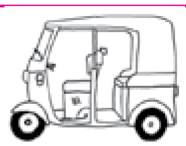
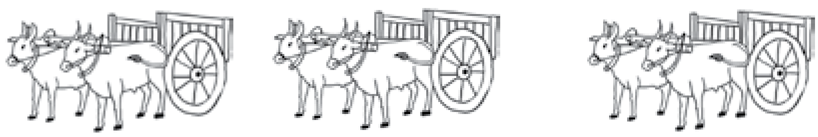
(1) ही माहिती कोणत्या खेळाशी संबंधित आहे ?

(2) चित्रावरून किती बाबींची माहिती मिळते ?

(3) चित्रात धावा दाखवण्यासाठी कोणते आकार दाखवले आहेत ?

दिलेल्या संख्यात्मक माहितीवरून चित्रालेख कसा काढायचा हे आपण पाहिले आहे. प्रमाण दिले असता चित्रे मोजून संख्यात्मक माहिती लिहिता येते.

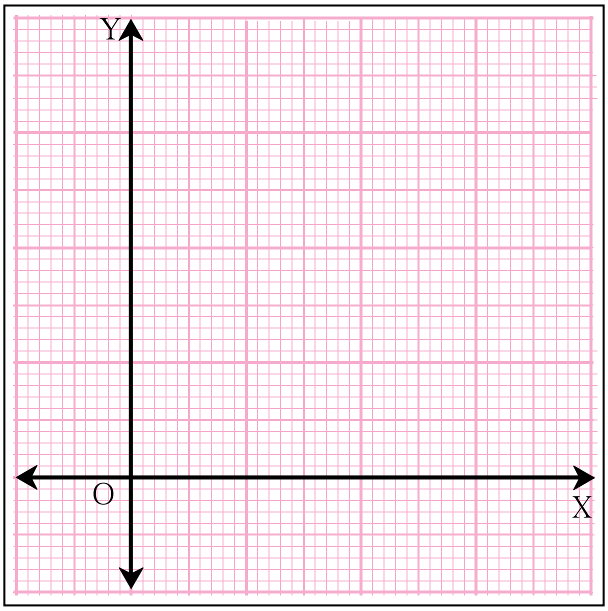
उदा. एका गावातील वाहनांचे प्रकार व वाहनांची संख्या दर्शवणारा चित्रालेख पुढे दिला आहे. खालील चित्रालेखात 1 चित्र = 5 वाहने घेऊन संख्या लिहा.

वाहनाचा प्रकार	वाहने	संख्या
सायकल		
स्कूटर		
रिक्षा		
बैलगाडी		

चित्रे काढायला खूप वेळ लागू शकतो. तीच माहिती चित्रांशिवाय कशी दाखवता येईल ?

जाणून घेऊया.

आलेख कागदाची ओळख

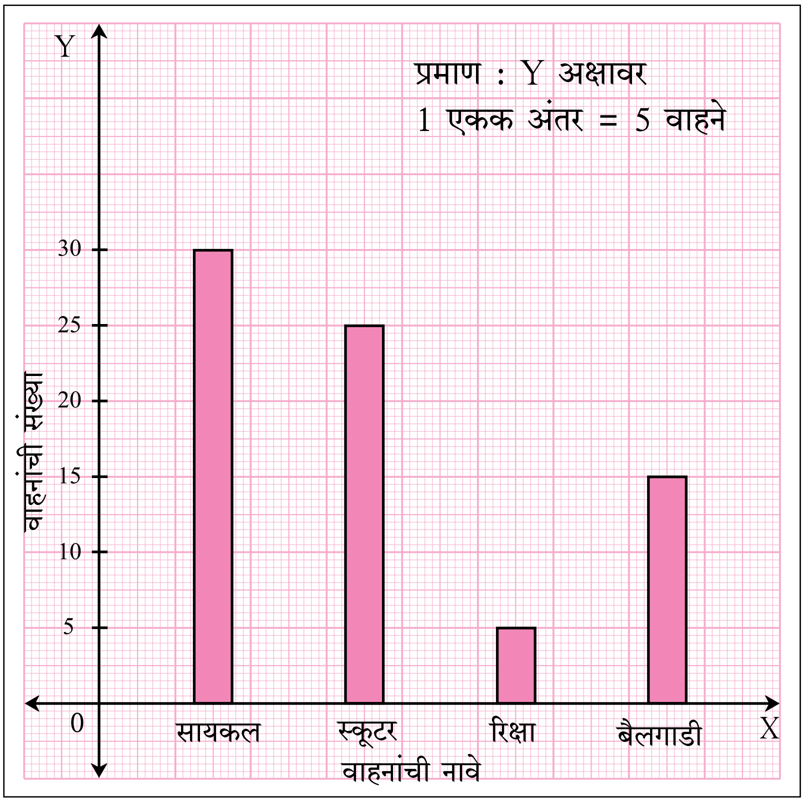


येथे दाखवलेला आलेख कागद पाहा. त्यावर काही ठळक व काही फिक्या रेषा आहेत. ठळक रेषा मोठे एकक दाखवतात. त्याचे समान भाग केले असता होणारे लहान भाग फिक्या रेषांनी दाखवतात. या आखणीमुळे योग्य प्रमाण घेऊन स्तंभाची उंची दाखवणे सोपे जाते.

आलेख कागदावर साधारण खालच्या बाजूला 'पाया' म्हणून एक आडवी रेषा घेतात. तिला **X–अक्ष** म्हणतात. या रेषेला काटकोन करणारी एक रेषा कागदाच्या डाव्या बाजूला काढतात. तिला **Y–अक्ष** म्हणतात.

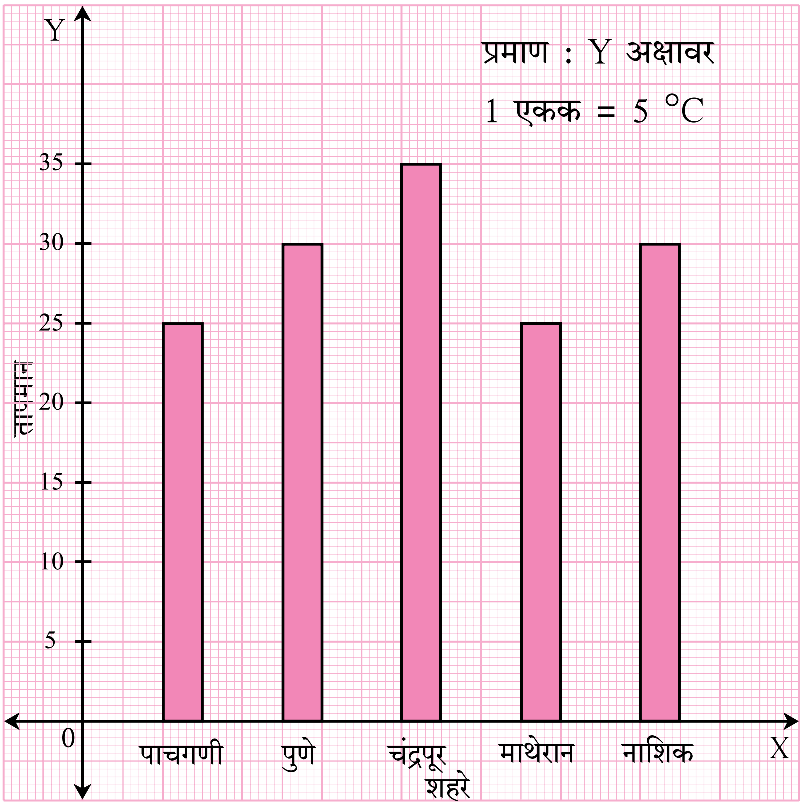
ज्या बाबींचा स्तंभालेख काढायचा आहे. त्या बाबी X–अक्षावर समान अंतरावर दाखवतात. प्रत्येक बाबींशी निगडित संख्या तिच्या नावावर उभ्या स्तंभाने दाखवतात. हा स्तंभ प्रमाणानुसार योग्य उंचीचा व Y–अक्षाला समांतर असतो.

आता आपण पृष्ठ 35 वर पाहिलेल्या चित्रालेखाचे स्तंभालेखात रूपांतर करू.



या स्तंभालेखात आपल्याला वाहने व त्यांच्या संख्या दाखवायच्या आहेत. म्हणजे 5, 15, 25 व 30 या संख्या दाखवायच्या आहेत. त्यासाठी 5 वाहने = 1 एकक असे प्रमाण घेऊ. आपला स्तंभालेख असा दिसेल.

1. पुढील स्तंभालेखात फेब्रुवारी महिन्यातील एका दिवसाचे वेगवेगळ्या शहरांचे अंश सेल्सिअसमधील कमाल तापमान दर्शवले आहे. आलेखाचे निरीक्षण करा व प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(1) उभ्या आणि आडव्या रेषेवर कोणती माहिती दर्शवली आहे ?

(2) सर्वांत जास्त तापमान कोणत्या शहराचे आहे ?

(3) कमाल तापमान समान असणारी शहरे कोणती ?

(4) कोणत्या शहरांचे कमाल तापमान 30 अंश सेल्सिअस आहे ?

(5) पाचगणी आणि चंद्रपूर या शहरांच्या कमाल तापमानातील फरक किती ?

जाणून घेऊया.

स्तंभालेख काढणे

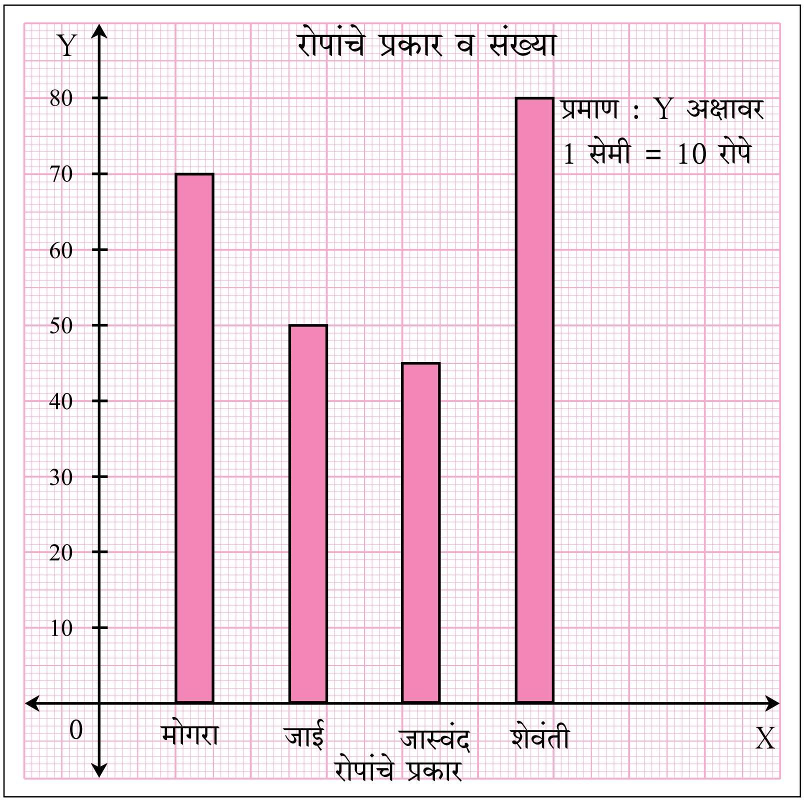
दिलेल्या माहितीवरून स्तंभालेख कसा काढायचा हे पुढील उदाहरणावरून समजून घ्या.

उदा. एका रोपवाटिकेतील रोपांची माहिती खाली दिली आहे. ही माहिती स्तंभालेख काढून दाखवा.

रोपांची नावे	मोगरा	जाई	जास्वंद	शेवंती
रोपांची संख्या	70	50	45	80

एक आलेख कागद घ्या.

(1) आलेख कागदावर मध्यभागी ‘रोपांचे प्रकार व संख्या’ असे शीर्षक लिहा.
(2) X व Y हे अक्ष व O हा छेदनबिंदू काढा.
(3) X-अक्षावर रोपांची नावे सारख्या अंतरावर लिहा.
(4) रोपांच्या संख्यांना 5 ने भाग जातो म्हणून Y अक्षावर 0.5 सेमी = 5 रोपे, म्हणजेच 1 सेमी = 10 रोपे हे प्रमाण योग्य प्रकारे दाखवता येते म्हणून हे प्रमाण घ्या.
(5) कागदाच्या उजव्या कोपऱ्यात प्रमाण लिहा.
(6) प्रत्येक रोपाच्या नावावर X-अक्षावर योग्य उंचीचा स्तंभ काढा.



वरील उदाहरणात Y अक्षावर वेगळे प्रमाण वापरून आलेख काढा व वरील आलेखाशी तुलना करा. (जसे, 1 सेमी = 5 रोपे)

हे मला समजले.

- स्तंभालेखात सर्व स्तंभाची रुंदी समान असते.
- लगतच्या स्तंभांमधील अंतर समान असते.
- सर्व स्तंभ योग्य उंचीचे असतात.

गणित माझा सोबती : वर्तमानपत्रांत, मासिकांत.

वर्तमानपत्रे किंवा मासिके यांमधून विविध माहिती दर्शवणाऱ्या स्तंभालेखाचा संग्रह करा.

सरावसंच 19

(1) एका गावातील काही कुटुंबप्रमुखांची नावे व त्यांच्या कुटुंबातील एका दिवसातील पिण्याच्या पाण्याचा वापर दिला आहे. दिलेल्या माहितीवरून स्तंभालेख काढा.
(प्रमाण : Y अक्षावर : 1 सेमी = 10 लीटर पाणी)

नाव	रमेश	शोभा	अयूब	ज्युली	राहुल
पिण्याच्या पाण्याचा वापर	30 लीटर	60 लीटर	40 लीटर	50 लीटर	55 लीटर

(2) एका प्राणिसंग्रहालयातील प्राणी व प्राण्यांची संख्या पुढे दर्शवल्याप्रमाणे आहे. दिलेल्या माहितीवरून स्तंभालेख काढा. (प्रमाण : Y अक्षावर, 1 सेमी = 4 प्राणी)

प्राणी	हरीण	वाघ	माकड	ससा	मोर
संख्या	20	4	12	16	8

(3) एका शाळेतील स्नेहसंमेलनातील विविध गुणदर्शनाच्या कार्यक्रमात भाग घेणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या खालील तक्त्यात दर्शवली आहे. या माहितीच्या आधारे स्तंभालेख काढा.
(प्रमाण : Y अक्षावर, 1 सेमी = 4 विद्यार्थी)

कार्यक्रम	नाटक	नृत्य	गायन	वादन	एकांकिका
विद्यार्थ्यांची संख्या	24	40	16	8	4

(4) एका ज्यूस सेंटरवर एका आठवड्यात ज्यूस घेण्यासाठी येणाऱ्या ग्राहकांची संख्या खालील तक्त्यात दर्शवली आहे. या माहितीच्या आधारे दिलेल्या प्रमाणांनुसार दोन वेगवेगळे स्तंभालेख काढा.
(प्रमाण : Y अक्षावर, 1 सेमी = 10 ग्राहक, 1 सेमी = 5 ग्राहक)

ज्यूसचा प्रकार	संत्री	अननस	सफरचंद	आंबा	डाळिंब
ग्राहक संख्या	50	30	25	65	10

(5)* सांगली जिल्ह्यातील 5 गावांमध्ये विद्यार्थ्यांनी वृक्षारोपण केले. या माहितीच्या आधारे स्तंभालेख काढा.
(प्रमाण : Y अक्षावर, 1 सेमी = 100 झाडे)

गावाचे नाव	दुधगाव	बागणी	समडोळी	आष्टा	कवठेपिरान
वृक्षारोपण केलेल्या झाडांची संख्या	500	350	600	420	540

(6)* यशवंत एका आठवड्यात वेगवेगळ्या व्यायाम प्रकारांसाठी खालीलप्रमाणे वेळ देतो. या माहितीचा तपशील दाखवणारा स्तंभालेख योग्य प्रमाण घेऊन काढा.

व्यायाम प्रकार	धावणे	योगासने	सायकलिंग	गिर्यारोहण	बॅडमिंटन
वेळ	35 मिनिटे	50 मिनिटे	1 तास 10 मिनिटे	$1\frac{1}{2}$ तास	45 मिनिटे

(7) तुमच्या वर्गातील चार मित्र-मैत्रिणींची नावे लिहा. त्यांच्या नावासमोर त्यांचे किलोग्रॅममधील वजन लिहा. या माहितीवरून वरीलप्रमाणे तक्ता तयार करा व स्तंभालेख काढा.

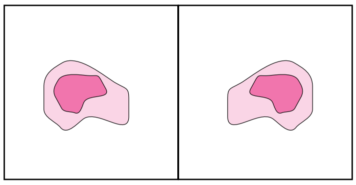
ICT Tools or Links

सांख्यिक माहितीचे सादरीकरण करताना स्तंभालेखाऐवजी विविध आलेखांचा वापर केला जातो. MS-Excell, PPT यामध्ये असलेले वेगवेगळे आलेख शिक्षकांच्या मदतीने पाहा.

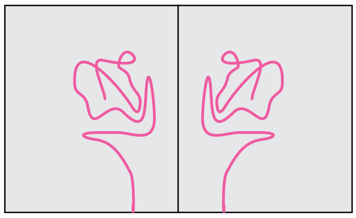
7 सममिती

हे करून पाहा.

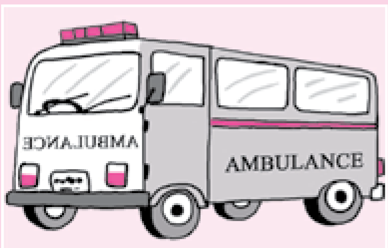
कृती : एक कागद घ्या. कागदाचे दोन समान भाग होतील अशी घडी घाला व नंतर घडी उलगडा. त्याच्या एका भागावर रंगाचा ठिपका काढा. कागद दुमडा. त्यावर थोडा दाब द्या. नंतर कागद उलगडा. काय दिसते ? तयार झालेली आकृती घडीवरील रेषेशी सममित आहे.



कृती : आता एक कागद घ्या. एक दोरा घ्या. तो रंगात बुडवा. कागदाच्या एका भागावर तो ठेवा. कागदाला घडी घाला. घडीवर दाब देऊन हळूच दोऱ्याचे एक टोक ओढा. कागद उलगडा. एक चित्र दिसेल. कागदाच्या घडीच्या दुसऱ्या बाजूला जो आकार दिसेल तो पहिल्या आकारासारखाच असेल. तयार झालेले चित्र सममित आहे असे म्हणतात.



विचार करा.

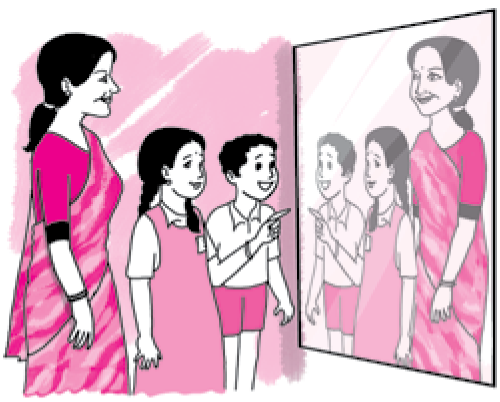


हे चित्र ओळखले का ?

या चित्रातील वाहनावर समोर लिहिलेली अक्षरांची रचना कोणत्या हेतूने केली असेल ? चित्रातील वाहनाच्या समोरील भागावर काढलेली अक्षरे एका कागदावर लिहा. तो कागद आरशासमोर धरून वाचा.

अशा प्रकारची अक्षरांची रचना तुम्हांला इतर कुठे दिसते का ?

चला, चर्चा करूया.



शिक्षिका : अनिल, सुधा आपण आरशात दिसत आहोत. ते आपले प्रतिबिंब आहे. त्यात वेगळे काय दिसते ?

सुधा : मी डाव्या बाजूला बॅज लावला आहे. तो आरशातल्या माझ्या प्रतिबिंबाच्या उजव्या बाजूला दिसत आहे.

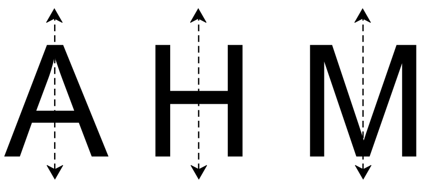
अनिल : मी आरशापासून जेवढ्या अंतरावर उभा आहे, तेवढ्याच अंतरावर आरशापासून माझे प्रतिबिंब दिसत आहे.

सुधा : बाईंच्या साडीचा पदर डाव्या खांद्यावर आहे, पण आरशात मात्र तो उजव्या खांद्यावर दिसत आहे.

शिक्षिका : आपण आणि आपले प्रतिबिंब हे आरशाच्या संदर्भात सममित आहेत.

जाणून घेऊया.

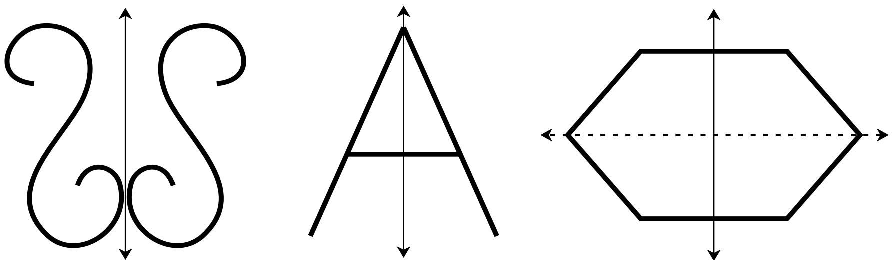
प्रतिबिंबित सममिती



A H M ही इंग्रजीतील अक्षरे मोठ्या आकारात वेगवेगळ्या कागदांवर काढा. ती अशा प्रकारे दुमडा, की त्याचे दोन भाग तंतोतंत जुळतील. ज्या रेषेवर दुमडून आकृतीचे दोन समान भाग मिळाले ती रेषा ठिपक्यांनी दाखवा. ती रेषा म्हणजे त्या आकृतीचा **सममित अक्ष.**

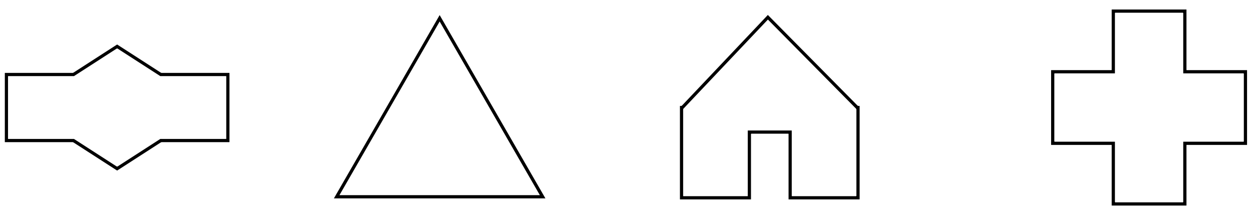
ज्या सममित आकृतीचे त्यातील अक्षामुळे होणारे दोन भाग एकमेकांशी तंतोतत जुळतात, त्या प्रकारच्या सममितीला प्रतिबिंबित सममिती म्हणतात. काही आकृत्यांना एकापेक्षा जास्त सममिती अक्ष असतात.

खालील आकृत्या सममित आकृत्या आहेत.



सरावसंच 20

1. खालील आकृत्यांचे सममित अक्ष दाखवा. एकापेक्षा जास्त सममिती अक्ष कोणत्या आकृतीत आहेत ?

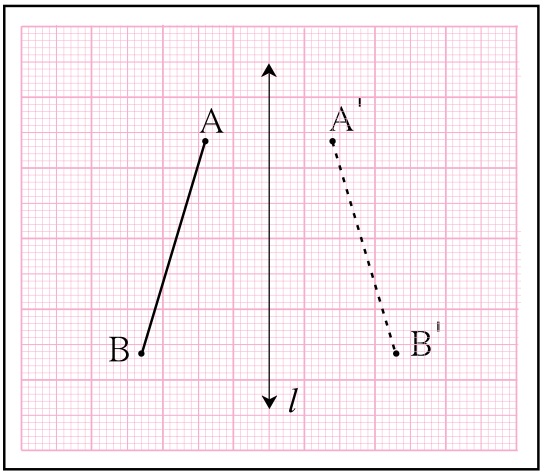


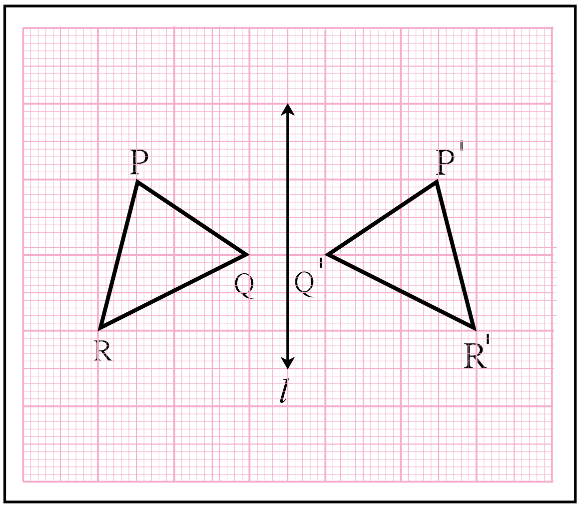
(1) (2) (3) (4)

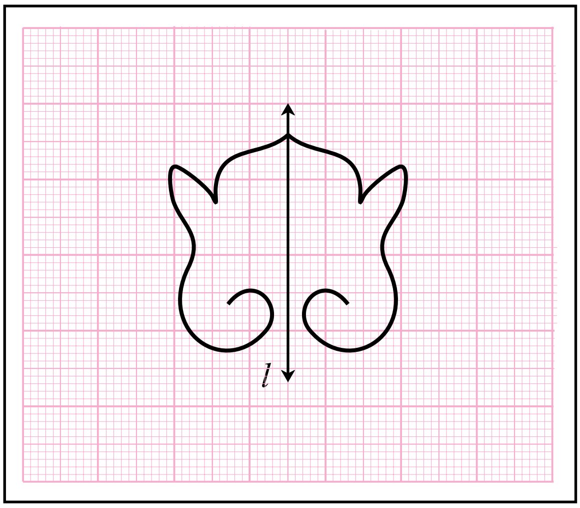
2. वहीवर इंग्रजी कॅपिटल अक्षरे लिहा. त्यांचे सममिती अक्ष काढण्याचा प्रयत्न करा. कोणकोणत्या अक्षरांना सममिती अक्ष काढता येतो ? एकापेक्षा जास्त सममिती अक्ष असलेली अक्षरे कोणती ?
3. दोरा, रंग व घडी घातलेला कागद यांचा उपयोग करून सममित आकार काढा.
4. व्यवहारातील विविध वस्तूंचे निरीक्षण करा. उदाहरणार्थ, झाडांची पाने, उडणारे पक्षी, ऐतिहासिक वास्तूंची चित्रे इत्यादी. त्यांच्यातील सममित आकार शोधा व त्यांचा संग्रह करा.

आलेख कागदावर सममित आकृत्या काढणे

आलेख कागदावरील आकृतीचे निरीक्षण करा. रेषा *l* च्या डाव्या बाजूला रेषाखंड AB काढला आहे. रेषा *l* च्या डावीकडे जेवढ्या अंतरावर A व B हे बिंदू आहेत. तेवढ्याच अंतरावर उजवीकडे A' व B' हे बिंदू आहेत. A' व B' हे बिंदू म्हणजे A व B ची प्रतिबिंबे आहेत. रेषाखंड A'B' ही आकृती रेषाखंड AB चे प्रतिबिंब आहे. रेख AB व रेख A'B' ची लांबी मोजा व निष्कर्ष काढा.



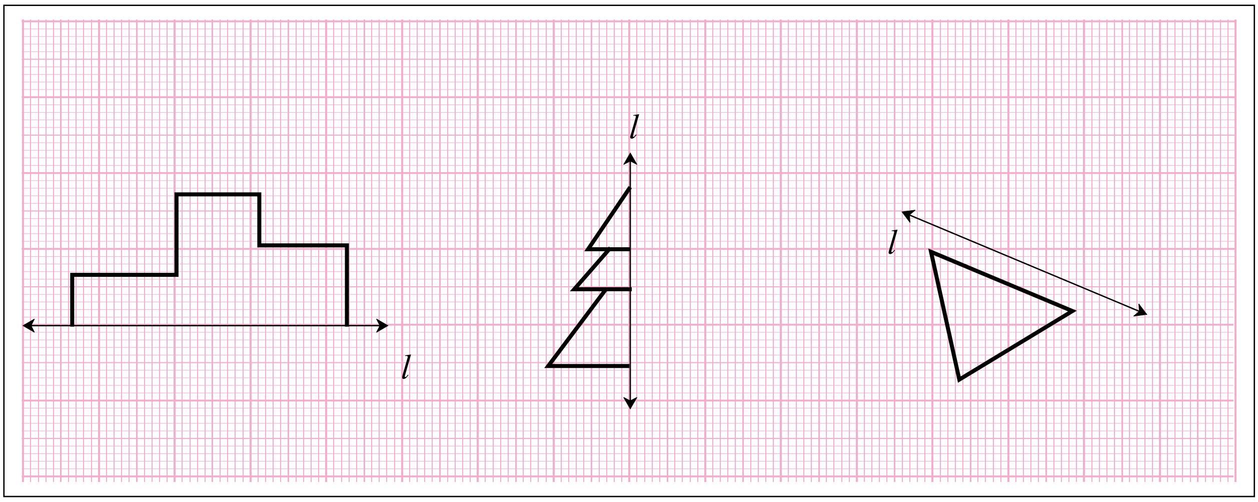




वरील आकृत्यांत रेषा *l* या सममित अक्षामुळे जे दोन भाग झाले आहेत, ते तंतोतंत जुळतात का ते पाहा.

सरावसंच 21

1. खाली काही आकृत्या व त्यांच्याजवळ रेषा *l* काढली आहे. ती रेषा सममित अक्ष होईल अशा प्रकारे दुसऱ्या बाजूला आकृती काढून सममित आकृत्या पूर्ण करा.



8 विभाज्यता

जरा आठवूया.

- विभाज्यतेची 2 ची कसोटी, 5 ची कसोटी व 10 ची कसोटी लिहा.
- खालील संख्या वाचा. त्यांपैकी कोणत्या संख्या 2 ने, 5 ने किंवा 10 ने विभाज्य आहेत ते ओळखून रिकाम्या चौकटींत लिहा.

  125, 364, 475, 750, 800, 628, 206, 508, 7009, 5345, 8710

2 ने विभाज्य	5 ने विभाज्य	10 ने विभाज्य

जाणून घेऊया.

विभाज्यतेच्या कसोट्या

आणखी काही कसोट्यांचा अभ्यास करू.

खालील सारणी पूर्ण करा.

संख्या	संख्येतील अंकांची बेरीज किती ?	बेरजेला 3 ने भाग जातो का?	दिलेली संख्या 3 ने विभाज्य आहे का ?
63	6 + 3 = 9	✓	✓
872	17	×	×
91			
552			
9336			
4527			

यावरून काय निष्कर्ष काढता येईल ?

हे मला समजले.

3 ची विभाज्यतेची कसोटी : जर कोणत्याही संख्येतील अंकांच्या बेरजेला 3 ने नि:शेष भाग जात असेल, तर ती संख्या 3 ने विभाज्य असते.

जाणून घेऊया.

खालील सारणी पूर्ण करा.

संख्या	दिलेल्या संख्येला 4 ने भागून पाहा. पूर्ण भाग जातो का ?	दशक व एककस्थानच्या अंकांनी तयार झालेली संख्या	तयार झालेली संख्या 4 ने विभाज्य आहे का ?
992	✓	92	✓
7314			
6448			
8116			
7773			
3024			

यावरून काय निष्कर्ष काढता येईल ?

हे मला समजले.

4 ची विभाज्यतेची कसोटी : जर कोणत्याही संख्येतील दशक व एककस्थानच्या अंकांनी तयार होणाऱ्या संख्येला 4 ने नि:शेष भाग जात असेल, तर ती संख्या 4 ने विभाज्य असते.

जाणून घेऊया.

खालील सारणी पूर्ण करा.

संख्या	दिलेल्या संख्येला 9 ने भागून पाहा. पूर्ण भाग जातो का ?	संख्येतील अंकांची बेरीज	बेरीज 9 ने विभाज्य आहे का ?
1980	✓	1 + 9 + 8 + 0 =18	✓
2999	×	29	×
5004			
13389			
7578			
69993			

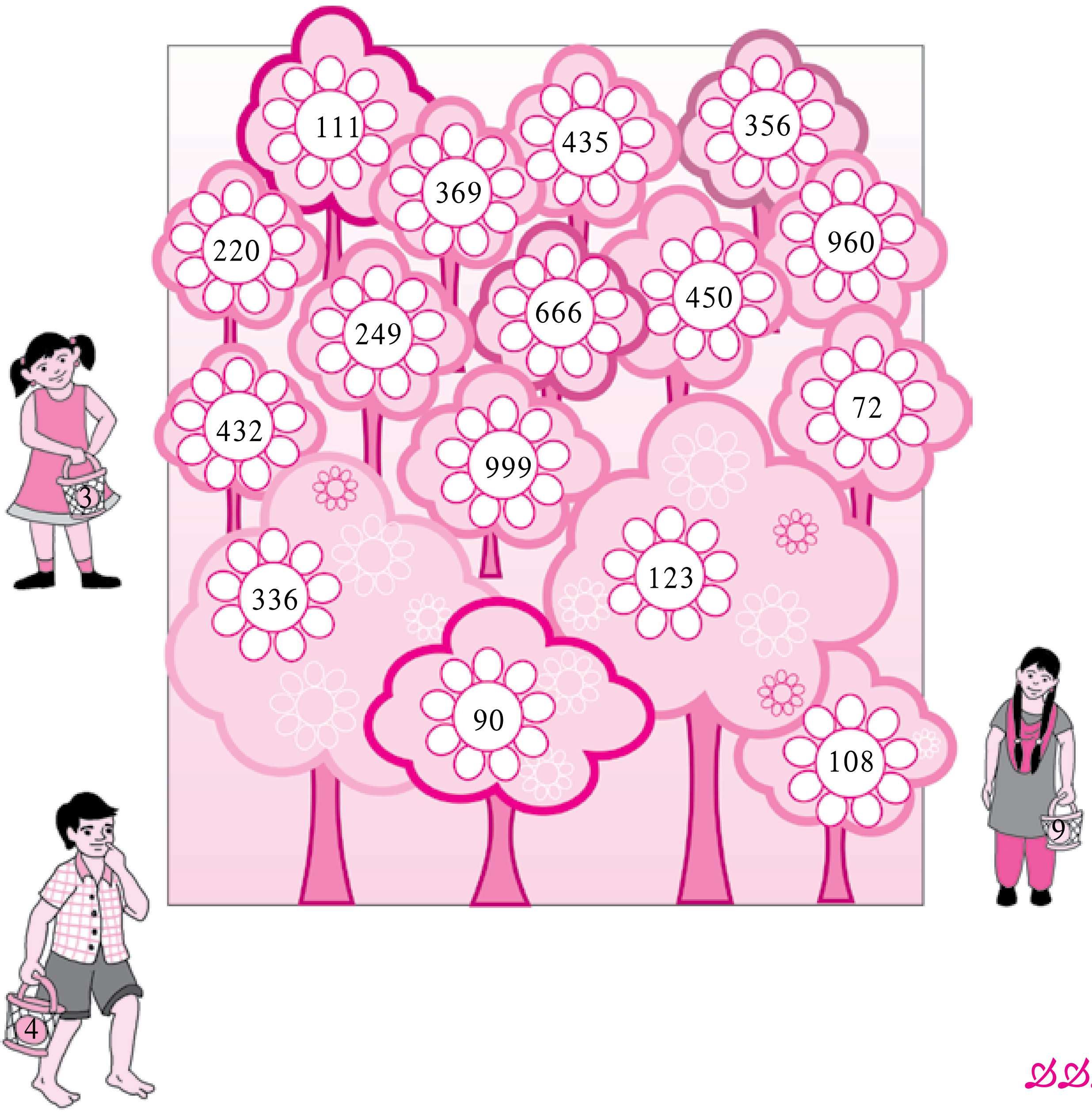
यावरून काय निष्कर्ष काढता येईल ?

हे मला समजले.

9 ची विभाज्यतेची कसोटी : **जर कोणत्याही संख्येमधील अंकांच्या बेरजेला 9 ने नि:शेष भाग जात असेल, तर ती संख्या 9 ने विभाज्य असते.**

सरावसंच 22

1. एका बागेत फुलझाडे आहेत. एकेका झाडावर एकच संख्या असलेली अनेक फुले आहेत. तीन विद्यार्थी परडी घेऊन फुले तोडायला गेले. परडीवर 3, 4, 9 यांपैकी एक संख्या आहे. प्रत्येक विद्यार्थी आपल्या परडीवरील संख्येने विभाज्य संख्या असलेले फूल तोडतो. एका झाडावरून एकच फूल तो घेतो. सांगा बरं ! प्रत्येक परडीत कोणत्या संख्यांची फुले असतील ?



9 मसावि–लसावि

जरा आठवूया.

विभाजक , विभाज्य

चौकटींत भाज्य, भाजक, भागाकार व बाकी यांपैकी योग्य शब्द भरा.

☐ ← 4)36 → ☐	9 → ☐	36 → ☐, 00
☐ ← 9)65 → ☐	7 → ☐	63 → ☐, 02

36 ला 4 ने भागल्यावर बाकी शून्य येते म्हणून 4 हा 36 चा **विभाजक** आहे व 36 ही संख्या 4 ने **विभाज्य** आहे.

65 ला 9 ने भागल्यावर बाकी शून्य आली नाही म्हणून येथे 9 हा 65 चा भाजक आहे, परंतु **विभाजक** नाही. तसेच 65 ही संख्या 9 ने **विभाज्य** नाही.

36 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

48 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

सामाईक विभाजक लिहा. ☐ , ☐ , ☐ , ☐ , ☐ , ☐

सरावसंच 23

1. खालील उदाहरणांतील संख्यांचे सर्व विभाजक लिहा व त्यांच्या सामाईक विभाजकांची यादी करा.

(1) 12, 16 (2) 21, 24 (3) 25, 30 (4) 24, 25 (5) 56, 72

जाणून घेऊया.

महत्तम सामाईक (साधारण) विभाजक : मसावि

उदा. मावशीने 12 मीटर लांबीची एका रंगाची व 18 मीटर लांबीची दुसऱ्या रंगाची अशा दोन प्रकारच्या कागदी पट्ट्या आणल्या आहेत. प्रत्येक रंगाच्या कागदी पट्टीचे समान लांबीचे तुकडे करायचे आहेत. जास्तीत जास्त किती लांबीचे तुकडे करता येतील ?

ज्या लांबीचे तुकडे करायचे आहेत, ती संख्या 12 व 18 ची विभाजक असली पाहिजे.

12 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, [6], 12

18 चे विभाजक : 1, 2, 3, [6], 9, 18

12 व 18 यांच्या सामाईक विभाजकांपैकी 6 हा सर्वांत मोठा विभाजक आहे, म्हणून जास्तीत जास्त 6 मीटर लांबीचे तुकडे करता येतील.

उदा. दुकानात 20 किग्रॅ ज्वारी व 50 किग्रॅ गहू आहेत. सर्व धान्य पिशव्यांमध्ये भरायचे आहे. प्रत्येक पिशवीत समान वजनाचे धान्य भरायचे आहे, तर जास्तीत जास्त किती वजनाचे धान्य प्रत्येक पिशवीत भरता येईल ?

पिशवीतील धान्याचे किलोग्रॅममधील वजन 20 व 50 चे विभाजक असले पाहिजे. शिवाय पिशवीत जास्तीत जास्त वजनाचे धान्य भरले पाहिजे, म्हणून 20 व 50 या संख्यांचा मसावि काढूया.

20 चे विभाजक : 1, 2, 4, 5, 10, 20

50 चे विभाजक : 1, 2, 5, 10, 25, 50

सामाईक विभाजक : 1, 2, 5, 10

20 व 50 च्या सामाईक विभाजकांतील 10 हा सर्वांत मोठा विभाजक म्हणजे महत्तम विभाजक आहे, म्हणजे 20 व 50 या संख्यांचा मसावि 10 आहे.

म्हणून प्रत्येक पिशवीत जास्तीत जास्त 10 किग्रॅ धान्य भरता येईल.

हे मला समजले.

दिलेल्या संख्यांचा मसावि काढणे म्हणजे संख्यांच्या विभाजकांची यादी करून त्यांतील सर्वांत मोठा सामाईक विभाजक शोधणे.

सरावसंच 24

1. खालील संख्यांचा मसावि काढा.

(1) 45, 30	(2) 16, 48	(3) 39, 25	(4) 49, 56	(5) 120, 144
(6) 81, 99	(7) 24, 36	(8) 25, 75	(9) 48, 54	(10) 150, 225

2. 18 मीटर लांब व 15 मीटर रुंद जमिनीच्या तुकड्यात भाजीपाला लावण्यासाठी मोठ्यात मोठ्या आकारांचे चौरसाकृती सारखे वाफे तयार करायचे झाल्यास प्रत्येक वाफा जास्तीत जास्त किती मीटर लांबीचा असावा ?

3. 8 मीटर आणि 12 मीटर लांबीच्या प्रत्येक दोरखंडांचे सारख्या लांबीचे तुकडे करायचे आहेत, तर अशा प्रत्येक तुकड्याची लांबी जास्तीत जास्त किती मीटर असावी ?

4. चंद्रपूरमधील ताडोबा व्याघ्र प्रकल्प पाहण्यासाठी 6 वी व 7 वी च्या वर्गातील अनुक्रमे 140 व 196 विद्यार्थी सहलीसाठी गेले. प्रत्येक इयत्तेतील विद्यार्थ्यांचे समान संख्येचे गट करायचे आहेत. प्रत्येक गटाला माहिती देण्यासाठी एक मार्गदर्शक त्याची फी देऊन मिळतो. जास्तीत जास्त किती विद्यार्थी प्रत्येक गटात असू शकतील ? प्रत्येक गटात जास्तीत जास्त विद्यार्थी घ्यायचे कारण काय असेल ?

5. 'तुमसर' येथील तांदूळ संशोधन केंद्रात बासमती जातीचे 2610 किग्रॅ व इंद्रायणी जातीचे 1980 किग्रॅ तांदूळ बियाणे आहे. त्यांच्या जास्तीत जास्त वजनाच्या सारख्या पिशव्या विक्रीसाठी तयार करायच्या आहेत, तर प्रत्येक पिशवीचे वजन किती असेल ? प्रत्येक जातीच्या तांदळाच्या किती पिशव्या तयार होतील ?

जाणून घेऊया.

लघुतम सामाईक (साधारण) विभाज्य : लसावि

3 चा व 4 चा पाढा लिहा. पाढ्यामध्ये त्या संख्येने विभाज्य संख्या क्रमाने लिहिलेल्या असतात हे लक्षात घ्या. 3 व 4 ने विभाज्य अशी सर्वांत लहान संख्या कोणती ? व्यवहारात काही ठिकाणी लघुतम साधारण विभाज्य (लसावि) उपयोगी पडतो. दिलेल्या संख्यांचा सर्वांत मोठा साधारण विभाज्य काढू शकता का ?

रेहाना आणि ॲना फुलांचे गजरे करतात. प्रत्येकीला समान संख्येची फुले टोपलीत द्यायची आहेत.

ताई : रेहाना, तू 6 फुले असलेले गजरे कर. ॲना तू 8 फुले असलेले गजरे कर. तुमच्या प्रत्येकीच्या टोपलीत कमीत कमी किती फुले ठेवू ?

रेहाना : मला 6 च्या पटीत फुलांची संख्या हवी.

ॲना : मला 8 च्या पटीत फुलांची संख्या हवी.

6 च्या पटीतील संख्या म्हणजे 6 ने विभाज्य संख्या : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78,...

8 च्या पटीतील संख्या म्हणजे 8 ने विभाज्य संख्या : 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104,...

सामाईक विभाज्य संख्या = 24, 48, 72, 96, ...

रेहाना : ताई, तू प्रत्येकीला 24, 48, 72 किंवा 96 एवढी फुले दिलीस, तर आम्ही दोघी तू सांगितल्याप्रमाणे फुलांचे गजरे करू शकू.

ॲना : कमीत कमी 24 फुले द्यावीच लागतील.

24 ही संख्या 6 व 8 चा लघुतम सामाईक विभाज्य आहे.(लसावि)

उदा. 13 व 6 चा लसावि काढा.

13 चा पाढा : 13, 26, 39, 52, 65, 78 , 91, 104, 117, 130

6 चा पाढा : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60

येथे सामाईक विभाज्य संख्या दिसतच नाही म्हणून दोन्ही पाढे पुढे वाढवू.

13 ने विभाज्य संख्या : 130, 143, 156,...

6 ने विभाज्य संख्या : 60, 66, 72, 78 , 84,...

13 ने व 6 ने विभाज्य संख्यांच्या याद्या पाहिल्या तर असे दिसते, की 78 ही सर्वांत लहान सामाईक विभाज्य संख्या आहे म्हणून 13 व 6 चा लसावि 78 आहे.

दोन संख्यांचा लसावि हा त्यांच्या गुणाकारापेक्षा मोठा असू शकत नाही.

हे मला समजले.

विचार करा.

उदा.

प्रवीण, बागेश्री व यश एकाच घरातील मुले आहेत. प्रवीण सैन्यात अधिकारी आहे. बागेश्री दुसऱ्या गावी वैद्यकीय महाविद्यालयामध्ये शिकते. यश जवळच्या गावी हायस्कूलच्या वसतिगृहात आहे. प्रवीण दर 120 दिवसांनी घरी येऊ शकतो. बागेश्री दर 45 दिवसांनी घरी येते, तर यश दर 30 दिवसांनी घरी येतो. सगळे जण 15 जून 2016 ला एकाच वेळी घरातून बाहेर पडले. त्या वेळी आईबाबा म्हणाले,''तुम्ही सगळे एकत्र घरी याल, त्या दिवशी आपण सण साजरा करू.'' आईने यशला विचारले, ''तो दिवस कोणता असेल ?''

यश म्हणाला, ''जितक्या दिवसांनी आम्ही एकाच वेळी घरी येणार ती संख्या 30, 45 आणि 120 यांनी विभाज्य हवी म्हणजे पुढच्या वर्षी 10 जूनला आम्ही एकत्र येऊ, तेव्हा आपला सण असेल.''

यशने उत्तर कसे काढले ?

हे मला समजले.

दिलेल्या संख्यांचा लसावि काढणे म्हणजे त्या संख्यांनी विभाज्य असलेल्या सर्व संख्या लिहून त्यांतील लहानात लहान सामाईक विभाज्य संख्या शोधणे.

सरावसंच 25

1. खालील संख्यांचा लसावि काढा.

   (1) 9, 15 (2) 2, 3, 5 (3) 12, 28 (4) 15, 20 (5) 8, 11

2. खालील उदाहरणे सोडवा.

   (1) कवायतीसाठी पटांगणावरील मुलांच्या प्रत्येक रांगेत 20 मुले किंवा प्रत्येक रांगेत 25 मुले राहतील अशा रांगा केल्यास, रांगा पूर्ण होतात व एकही मुलगा शिल्लक राहत नाही, तर त्या शाळेत कमीत कमी किती मुले आहेत ?

   (2) वीणाजवळ काही मणी आहेत. तिला समान मणी असलेल्या माळा तयार करायच्या आहेत. तिने 16, 24 किंवा 40 मण्यांच्या माळा केल्या तर एकही मणी शिल्लक राहत नाही, तर तिच्याजवळ कमीत कमी किती मणी आहेत ?

   (3) तीन वेगवेगळ्या डब्यांत समान संख्येचे लाडू ठेवले. पहिल्या डब्यातील लाडू 20 मुलांना, दुसऱ्या डब्यातील लाडू 24 मुलांना व तिसऱ्या डब्यातील लाडू 12 मुलांना समान वाटले. एकही लाडू उरला नाही, तर तीनही डब्यात मिळून एकूण कमीत कमी किती लाडू होते ?

   (4) एका शहरात एकाच मोठ्या रस्त्यावरील तीन वेगवेगळ्या चौकांतील सिग्नल पाहिले. ते दर 60 सेकंद, 120 सेकंद व 24 सेकंदांनी हिरवे होतात. सकाळी 8 वाजता सिग्नल चालू केला, तेव्हा तीनही सिग्नल हिरवे होते. त्यानंतर किती वेळाने तीनही सिग्नल एकाच वेळी पुन्हा हिरवे होतील ?

   (5) $\frac{13}{45}$ व $\frac{22}{75}$ या व्यवहारी अपूर्णांकांचे सममूल्य समच्छेद अपूर्णांक शोधा व त्यांची बेरीज करा.

गणिती कोडे!

एका बाजूस संख्या आणि दुसऱ्या बाजूस माहिती लिहिली आहे, असे चार कागद आपल्याकडे आहेत. कागदांवरील संख्या 7, 2, 15, 5 अशा आहेत आणि कागदांवरील माहिती खालीलप्रमाणे आहे. (माहितीचा क्रम भिन्न आहे.)

(I) 7 ने भाग जाणारी संख्या (II) मूळ संख्या

(III) विषम संख्या (IV) 100 पेक्षा मोठी संख्या

जर प्रत्येक कागदावरील संख्या त्या कागदाच्या मागे लिहिलेल्या माहितीशी विसंगत आहे, तर ‘100 पेक्षा मोठी संख्या’ अशी माहिती असलेल्या कागदावरील मागची संख्या कोणती ?

विभाग दुसरा

10 समीकरणे

चला, चर्चा करूया.

शिक्षक : कोणत्या दोन संख्या व गणिती क्रिया वापरून उत्तर 15 येते हे शोधा.

शर्वरी : 5 × 3 केले, की उत्तर 15 मिळते आणि 45 ला 3 ने भागले तरीही उत्तर 15 येते.

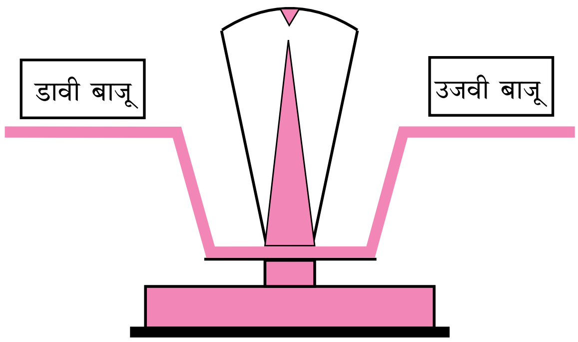
शुभंकर : 17 – 2 केले तरी उत्तर 15 येते आणि 10 मध्ये 5 मिळवले तरी उत्तर 15 येते.

शिक्षक : शाब्बास! म्हणजे 5 × 3 किंवा 17 – 2 या दोन्ही क्रियांनी एकच उत्तर मिळते. हेच आपण 5 × 3 = 17 – 2 असे लिहितो. गणिती भाषेत '=' (बरोबर) हे चिन्ह वापरून डाव्या आणि उजव्या बाजूच्या गणिती क्रिया करून आलेल्या संख्या समान आहेत हे दाखवतो. अशा समानतेला **'समीकरण'** असे म्हणतात.

शर्वरी : आपण 17 – 2 = 5 × 3 असे समीकरण लिहू शकतो का ?

शिक्षक : हो ! तेही समीकरण बरोबर आहे. समीकरणाच्या बाजूंची अदलाबदल करून नवे समीकरण लिहिले तर तेही बरोबर म्हणजेच संतुलित असते.

जाणून घेऊया.



तराजूच्या दोन्ही बाजूला वजन समान असेल, तर तो संतुलित राहतो. असा संतुलित वजनकाटा हा समीकरणासारखा असतो.

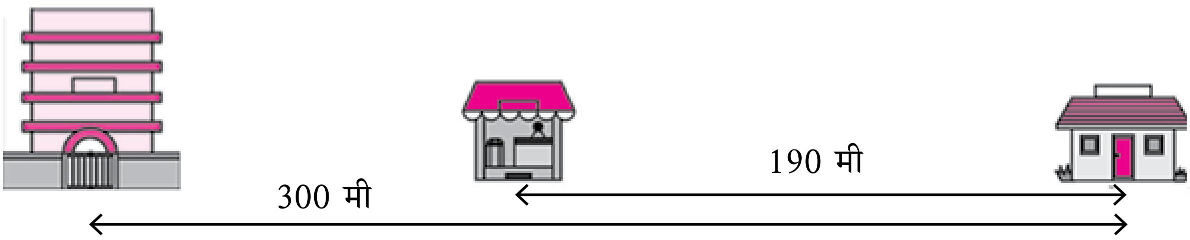
सरावसंच 26

1. खाली दोन ओळींत वेगवेगळ्या गणिती क्रिया दिल्या आहेत. त्यांच्यापासून मिळणाऱ्या संख्या शोधून समीकरणे तयार करा.

16 ÷ 2,	5 × 2,	9 + 4,	72 ÷ 3,	4 + 5
8 × 3,	19 – 10,	10 – 2,	37 – 27,	6 + 7

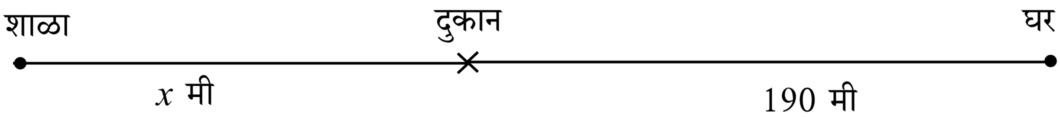
जाणून घेऊया.

समीकरणाची उकल



वरील चित्रात शाळा व घर यांतील अंतर 300 मीटर दिसत आहे. त्याच सरळ रस्त्यावर शाळा व घर यांच्यामधे दुकान आहे. दुकान व घर यांतील अंतर 190 मीटर आहे, तर शाळा व दुकान यांतील अंतर किती ?

संख्येसाठी अक्षराचा वापर



शिक्षक: आपण दिलेली माहिती वरील चित्रात कशी दाखवली आहे ते पाहा.

सुजाता: सर, दुकान व शाळा यांतील अंतर x ने का दाखवले आहे ?

शिक्षक: ते अंतर संख्येऐवजी x मीटर आहे असे मानले आहे. ते अंतर शोधायचे आहे. सध्या x या अक्षराने ते दाखवले आहे.

समीर : म्हणजे x व 190 यांची बेरीज 300 होईल.

शिक्षक: बरोबर, ही माहिती समीकरणाच्या रूपात लिहू. ध्यानात ठेवा, की x ही संख्या आहे पण अजून x ची किंमत समजलेली नाही.

$x + 190 = 300$ येथे x ची किंमत किती येईल ?

शबानाने x साठी वेगवेगळ्या संख्या वापरून पाहिल्या.

प्रथम x ची किंमत 70 मानली, तेव्हा डावी बाजू $70 + 190 = 260$ झाली. ती उजव्या बाजूपेक्षा लहान आहे. मग x साठी 150 ही संख्या घेतली, तेव्हा डावी बाजू $150 + 190 = 340$ झाली. ही उजव्या बाजूपेक्षा मोठी झाली. नंतर x ची किंमत 110 मानली, तेव्हा डावी बाजू उजव्या बाजूएवढी झाली व समीकरण संतुलित राहिले, यावरून x ची किंमत किंवा दुकान व शाळा यांतील अंतर 110 मीटर आहे हे समजले.

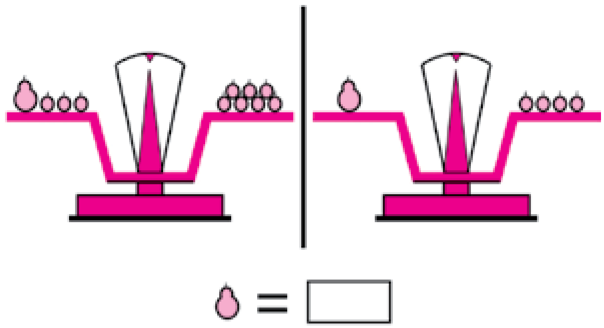
समीकरणात कधी कधी एखाद्या संख्येसाठी अक्षर वापरले जाते. समीकरण संतुलित राहील अशी त्या अक्षराची किंमत शोधायची असते. अशा अक्षराला **'चल'** असे म्हणतात. **चलाच्या ज्या किमतीने समीकरण संतुलित राहते, त्या किमतीला समीकरणाची 'उकल' असे म्हणतात.**

समीकरण सोडवणे म्हणजे समीकरणातील चलाची किंमत काढणे म्हणजेच त्याची उकल शोधणे होय.

वरील उदाहरणात $x + 190 = 300$ या समीकरणाची उकल 110 आहे.

जाणून घेऊया.

समीकरण सोडवणे



शिक्षक : एका पेरूचे वजन किती बोरांइतके आहे हे कसे शोधणार ?

जॉन : तराजूच्या प्रत्येक पारड्यांतून तीन बोरे काढल्यास तराजू संतुलित राहील व एका पेरूचे वजन 4 बोरांच्या वजनाइतके आहे हे समजेल.

शिक्षक : शाब्बास! क्रिया बरोबर ओळखली. एका चलाचे समीकरण सोडवून उकल काढताना, आपण दोन्ही बाजूंवर समान क्रिया करून संतुलित समीकरणे मिळवतो. कारण पहिले समीकरण संतुलित असेल, तर अशा क्रियेतून मिळणारे नवे समीकरणही संतुलित असते. अखेर समीकरण सोपे होत जाते व चलाची किंमत म्हणजेच समीकरणाची उकल मिळते.

$x + 3 = 7$

$\therefore x + 3 - 3 = 7 - 3$ (दोन्ही बाजूंतून 3 वजा केले)

$\therefore x + 0 = 4$

$\therefore x = 4$

आपण आधी पाहिलेल्या समीकरणाचा पुन्हा विचार करू.

$x + 190 = 300$

$\therefore x + 190 - 190 = 300 - 190$ (दोन्ही बाजूंतून 190 वजा केले)

$\therefore x + 0 = 110$

$\therefore x = 110$

समीकरणाची उकल शोधताना अंदाजाने अनेक किमती तपासण्याऐवजी अशी सोपी व अचूक पद्धत वापरावी. त्यामुळे चलाची किंमत मिळते म्हणजेच समीकरणाची उकल मिळते.

समीकरणाचा उपयोग करून काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. दिलजीतचे 4 वर्षांपूर्वीचे वय 8 वर्षे होते. यावरून त्याचे आजचे वय किती ?

दिलजीतचे आजचे वय a वर्षे मानू. दिलेली माहिती a च्या भाषेत लिहू.

$a - 4 = 8$

$\therefore a - 4 + 4 = 8 + 4$ (दोन्ही बाजूंत 4 मिळवले)

$\therefore a + 0 = 12$

$\therefore a = 12$

$\therefore$ दिलजीतचे आजचे वय 12 वर्षे आहे.

उदा. जस्मीनकडे काही रुपये होते. तिच्या आईने तिला 7 रुपये दिल्यावर तिच्याकडे 10 रुपये झाले, तर आधी तिच्याकडे किती रुपये होते ?

जस्मीनजवळ आधी y रुपये होते असे मानू.

$\therefore\ y + 7 = 10$

$\therefore\ y + 7 - 7 = 10 - 7$ (दोन्ही बाजूंतून 7 वजा करू)

$\therefore\ y + 0 = 3$

$\therefore\ y = 3$

म्हणजे जस्मीनजवळ आधी 3 रुपये होते.

उदा. एका पेढ्यांच्या बॉक्समध्ये काही पेढे आहेत. प्रत्येकाला 2 पेढे याप्रमाणे वाटल्यास ते 20 मुलांना पुरतात, तर बॉक्समध्ये एकूण पेढे किती ?

एकूण पेढ्यांची संख्या p मानू.

$\frac{p}{2} = 20$

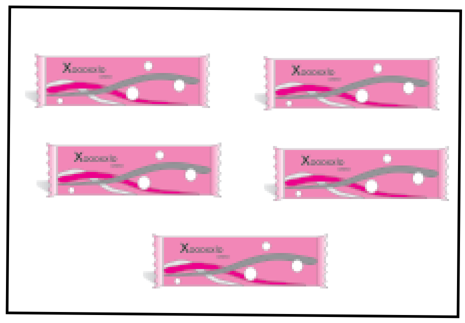
$\therefore\ \frac{p}{2} \times 2 = 20 \times 2$ (दोन्ही बाजूंना 2 ने गुणले)

$p = 40$

म्हणून बॉक्समध्ये 40 पेढे आहेत.

उदा. 5 चॉकलेटची किंमत 25 रुपये आहे.

एका चॉकलेटची किंमत किती ?



₹ 25

एका चॉकलेटची किंमत k रुपये मानू.

$5k = 25$

$\therefore\ \frac{5k}{5} = \frac{25}{5}$ (दोन्ही बाजूंना 5 ने भागले)

$\therefore\ 1k = 5$

$\therefore\ k = 5$

म्हणून एका चॉकलेटची किंमत 5 रुपये आहे.

हे मला समजले.

समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर प्रत्येक वेळी समान क्रिया केली, तर मिळणारे समीकरण संतुलित राहते. संतुलित समीकरणांवर खालीलपैकी कोणतीही क्रिया केली, तरी मिळणारे समीकरण संतुलित असते.

- **दोन्ही बाजूंमध्ये समान संख्या मिळवणे.**
- **दोन्ही बाजूंमधून समान संख्या वजा करणे.**
- **दोन्ही बाजूंना समान संख्येने गुणणे.**
- **दोन्ही बाजूंना शून्येतर समान संख्येने भागणे.**
- **दोन्ही बाजूंची अदलाबदल करणे.**

सरावसंच 27

1. खालील माहिती अक्षर वापरून लिहा.

   (1) एक संख्या व 3 यांची बेरीज.

   (2) एका संख्येमधून 11 वजा केले तर येणारी वजाबाकी.

   (3) 15 आणि एक संख्या यांचा गुणाकार.

   (4) एका संख्येची चौपट 24 आहे.

2. खालील समीकरणाची उकल काढण्यासाठी समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना कोणती क्रिया करावी लागेल, ते पाहा.

   (1) $x + 9 = 11$ (2) $x - 4 = 9$ (3) $8x = 24$ (4) $\frac{x}{6} = 3$

3. खाली काही समीकरणे आणि चलाच्या किमती दिल्या आहेत. त्या किमती दिलेल्या समीकरणाच्या उकली आहेत का ते ठरवा.

क्र.	समीकरण	चलाची किंमत	समीकरणाची उकल (आहे/नाही)
1	$y - 3 = 11$	$y = 3$	नाही
2	$17 = n + 7$	$n = 10$	
3	$30 = 5x$	$x = 6$	
4	$\frac{m}{2} = 14$	$m = 7$	

4. खालील समीकरणे सोडवा.

   (1) $y - 5 = 1$ (2) $8 = t + 5$ (3) $4x = 52$ (4) $19 = m - 4$

   (5) $\frac{P}{4} = 9$ (6) $x + 10 = 5$ (7) $m - 5 = -12$ (8) $P + 4 = -1$

5. खालील उदाहरणांतील दिलेल्या माहितीवरून समीकरण तयार करा व उकल शोधा.

   (1) हरबाकडे काही मेंढ्या होत्या. बाजारात त्यांतील 34 मेंढ्या विकल्यानंतर 176 मेंढ्या शिल्लक राहिल्या, तर हरबाकडे एकूण किती मेंढ्या होत्या ?

   (2) साक्षीने घरी गुळांबा तयार केला व काही बाटल्यांमध्ये भरला. त्या बाटल्यांपैकी 7 बाटल्या गुळांबा मैत्रिणींना वाटल्यानंतर घरी 12 बाटल्या गुळांबा शिल्लक राहिला, तर एकूण किती बाटल्या गुळांबा तयार केला? एका बाटलीतील गुळांब्याचे वजन 250 ग्रॅम असेल, तर तिने एकूण किती वजनाचा गुळांबा तयार केला होता ?

   (3) अर्चनाने काही किग्रॅ गहू बाजारातून खरेदी केला. प्रत्येक महिन्याकरता 12 किग्रॅ असे 3 महिने गहू दळणाकरता काढला, तेव्हा 14 किग्रॅ गहू शिल्लक राहिला, तर अर्चनाने एकूण किती गहू खरेदी केला होता?

11 गुणोत्तर – प्रमाण

चला, चर्चा करूया.

मागील इयत्तांमध्ये आपण दोन संख्यांची तुलना करायला शिकलो आहोत. आता आपण आणखी वेगळ्या प्रकारे तुलना कशी करतात हे पाहू. जसे, नीलिमा 12 वर्षांची आहे व रमेश 6 वर्षांचा आहे.

नीलिमा व रमेश यांच्या वयांची तुलना कशी करता येईल ?

रमेशने वयांची तुलना वजाबाकीने केली, तर नीलिमाने वयांची तुलना पटीने केली.

जाणून घेऊया.

नीलिमाचे वय रमेशच्या वयाच्या दुप्पट आहे. हीच माहिती नीलिमा व रमेश यांच्या वयांचे प्रमाण 2:1 आहे असे लिहितात. **2:1** याचे वाचन **'दोनास एक'** असे करतात. गणिती भाषेत दोन संख्यांचे प्रमाण गुणोत्तराच्या भाषेत लिहिता येते. 2:1 हे प्रमाण गुणोत्तर रूपात $\frac{2}{1}$ असेही लिहितात.

प्रमाणाची व्यवहारातील उदाहरणे

उदा. जानकी अम्मांनी बनवलेल्या इडल्या व डोसे चवदार असतात. इडलीच्या पीठासाठी त्या 1 वाटी उडीद डाळीस 2 वाट्या तांदूळ हे प्रमाण वापरतात, तर डोसा बनवताना 1 वाटी उडीद डाळीस 3 वाट्या तांदूळ घेतात, म्हणजे इडलीसाठी डाळ व तांदूळ यांचे प्रमाण 1:2 किंवा गुणोत्तर $\frac{1}{2}$ आहे, तर डोशासाठी ते प्रमाण 1:3 म्हणजेच त्यांचे गुणोत्तर $\frac{1}{3}$ आहे.

उदा. मार्गारिटची बिस्किटे छान असतात. ती बिस्किटांसाठी 2 वाट्या साखरेबरोबर 3 वाट्या गव्हाचे पीठ वापरते म्हणजे बिस्किटांत साखर व पीठ यांचे प्रमाण 2:3 किंवा त्यांचे गुणोत्तर $\frac{2}{3}$ आहे.

उदा. मुलींना सारख्याच प्रमाणात फुले वाटली. रिकाम्या चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

मुली	3	5	....	1
फुले	12	....	32	....

$\frac{\text{मुलींची संख्या}}{\text{फुलांची संख्या}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ म्हणजे एका मुलीस 4 फुले मिळाली.

मुली व फुले यांचे प्रमाण 'एकास चार' आहे. ते 1:4 किंवा त्यांचे गुणोत्तर $\frac{1}{4}$ असेही लिहितात.

उदा. वर्गातील प्रत्येक विद्यार्थ्याने आपल्या वयाचे आजीच्या वयाशी असलेले गुणोत्तर काढा.

जॉनचे वय 10 वर्षे आहे व त्याच्या आजीचे वय 65 वर्षे आहे. जॉन म्हणाला, की त्याच्यासाठी हे गुणोत्तर $\frac{10}{65}$ आहे.

$\frac{10}{65} = \frac{10 \div 5}{65 \div 5} = \frac{2}{13}$ सममूल्य अपूर्णांकाचा उपयोग करून गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहिता येते.

उदा. निखिलने 12 पेरू व 16 चिकू आणले.

(1) पेरूंचे चिकूंशी असलेले गुणोत्तर काढा.

पेरूंचे चिकूंशी असलेले गुणोत्तर

$\frac{\text{पेरूंची संख्या}}{\text{चिकूंची संख्या}} = \frac{12}{16} = \frac{12 \div 4}{16 \div 4} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ पेरूंचे चिकूंशी असलेले गुणोत्तर $\frac{3}{4}$ आहे.

(2) चिकूंचे पेरूंशी असलेले गुणोत्तर काढा.

चिकूंचे पेरूंशी असलेले गुणोत्तर

$\frac{\text{चिकूंची संख्या}}{\text{पेरूंची संख्या}} = \frac{16}{12} = \frac{16 \div 4}{12 \div 4} = \frac{4}{3}$

$\therefore$ चिकूंचे पेरूंशी असलेले गुणोत्तर $\frac{4}{3}$ आहे.

हे करून पाहा.

पुढील आकृतीमध्ये काही चौकटी तुमच्या आवडीच्या रंगाने रंगवा व काही रिकाम्या ठेवा.

(1) पुढील आकृतीमधील एकूण चौकटी मोजा व लिहा.

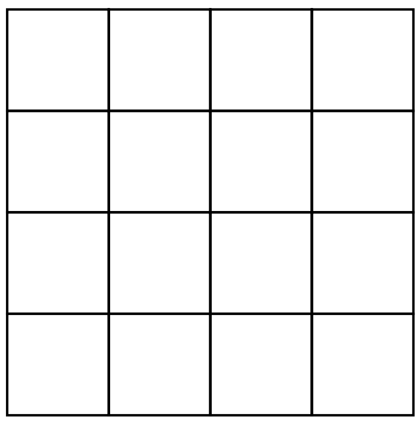
(2) रंगवलेल्या चौकटी मोजा व लिहा.

(3) रिकाम्या चौकटी मोजा व लिहा.

(4) रंगवलेल्या चौकटींचे रिकाम्या चौकटींशी गुणोत्तर काढा.

(5) रंगवलेल्या चौकटींचे एकूण चौकटींशी गुणोत्तर काढा.

(6) रिकाम्या चौकटींचे एकूण चौकटींशी गुणोत्तर काढा.



जाणून घेऊया.

गुणोत्तरासंबंधी महत्त्वाच्या बाबी

उदा. गुळाची लहान ढेप 1 किग्रॅ वजनाची आहे व गुळाच्या खड्याचे वजन 200 ग्रॅम आहे, तर गुळाच्या खड्याच्या वजनाचे गुळाच्या ढेपेच्या वजनाशी गुणोत्तर काढा.

$\dfrac{\text{गुळाच्या खड्याचे वजन}}{\text{गुळाच्या ढेपेचे वजन}} = \dfrac{200}{1}$ असे लिहिले.

हे बरोबर आहे का ?

गुळाच्या खड्याचे वजन ढेपेच्या वजनाच्या 200 पट आहे का ?

यात काय चूक झाली ?

प्रथम दोन्ही राशी समान एककात मोजू. यासाठी ग्रॅम वापरणे सोईचे आहे.

1 किग्रॅ = 1000 ग्रॅम

$\therefore$ ढेपेचे वजन 1000 ग्रॅम आणि गुळाच्या खड्याचे वजन 200 ग्रॅम आहे.

$$\frac{\text{गुळाच्या खड्याचे वजन}}{\text{गुळाच्या ढेपेचे वजन}} = \frac{200}{1000} = \frac{2\times100}{10\times100} = \frac{2}{10} = \frac{1\times2}{5\times2} = \frac{1}{5}$$

$\therefore$ गुळाच्या खड्याच्या वजनाचे गुळाच्या ढेपेच्या वजनाशी गुणोत्तर $\frac{1}{5}$ आहे.

हे मला समजले.

एकाच प्रकारच्या (राशींच्या) मापनांचे गुणोत्तर काढताना त्या मापनांची एकके समान असली पाहिजेत.

गुणोत्तराचा उपयोग करून समीकरण मांडता येते व त्यामुळे उदाहरण सोडवणे सोपे जाते.

उदा. शाळेतील मुलींसाठी होस्टेल बांधायचे आहे. दर 15 मुलींसाठी दोन शौचालये हवीत असे ठरले आहे. 75 मुली होस्टेलमध्ये राहणार असतील, तर त्या प्रमाणात किती शौचालये बांधावी लागतील ?

शौचालये व मुलींची संख्या यांचे प्रमाण म्हणजेच गुणोत्तर पाहू. 75 मुलींसाठी x शौचालये लागतील असे मानू. शौचालयाची संख्या व मुलींची संख्या यांचे गुणोत्तर $\frac{2}{15}$ आहे. ते दोन प्रकारांनी लिहू व समीकरण मांडू.

$$\frac{x}{75} = \frac{2}{15}$$

$$\therefore \frac{x}{75} \times 75 = \frac{2}{15} \times 75$$ (दोन्ही बाजूंना 75 ने गुणले)

$$\therefore x = 2 \times 5$$

$$= 10$$

$\therefore$ 75 मुलींसाठी 10 शौचालये लागतील.

सरावसंच 28

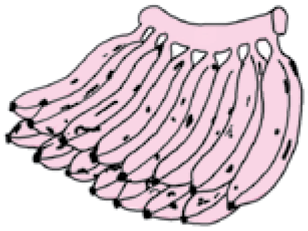
1. खालील प्रत्येक उदाहरणांत पहिल्या संख्येचे दुसऱ्या संख्येशी असलेले प्रमाण काढा.
   (1) 24, 56 (2) 63, 49 (3) 52, 65 (4) 84, 60 (5) 35, 65 (6) 121, 99
2. पहिल्या राशीचे दुसऱ्या राशीशी असलेले गुणोत्तर काढा.
   (1) 25 मणी, 40 मणी (2) 40 रुपये, 120 रुपये (3) 15 मिनिटे, 1 तास
   (4) 30 लीटर, 24 लीटर (5) 99 किग्रॅ, 44000 ग्रॅम (6) 1 लीटर, 250 मिली
   (7) 60 पैसे, 1 रुपया (8) 750 ग्रॅम, $\frac{1}{2}$ किग्रॅ (9) 125 सेमी, 1 मीटर
3. रीमाजवळ 24 वह्या व 18 पुस्तके आहेत, तर वह्यांचे पुस्तकांशी गुणोत्तर काढा.
4. मैदानामध्ये क्रिकेटचे 30 खेळाडू व खो-खो चे 20 खेळाडू प्रशिक्षण घेत आहेत, तर क्रिकेटच्या खेळाडूंचे एकूण खेळाडूंशी गुणोत्तर लिहा.
5. स्नेहलकडे 80 सेमी लांबीची लाल रिबीन आहे व 2.20 मीटर लांबीची निळी रिबीन आहे, तर लाल रिबीनच्या लांबीचे निळ्या रिबीनच्या लांबीशी गुणोत्तर काढा.
6. शुभमचे आजचे वय 12 वर्षे आहे. शुभमच्या वडिलांचे आजचे वय 42 वर्षे आहे. शुभमची आई त्याच्या वडिलांपेक्षा 6 वर्षांनी लहान आहे, तर खालील गुणोत्तरे काढा.
   (1) शुभमच्या आजच्या वयाचे आईच्या आजच्या वयाशी गुणोत्तर.
   (2) शुभमच्या आईच्या आजच्या वयाचे वडिलांच्या आजच्या वयाशी गुणोत्तर.
   (3) जेव्हा शुभमचे वय 10 वर्षे होते, तेव्हा शुभमच्या वयाचे त्याच्या आईच्या त्या वेळच्या वयाशी गुणोत्तर.

जाणून घेऊया.

एकमान पद्धत

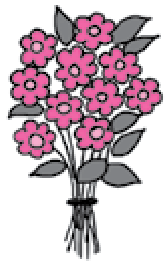
विजयाला वाढदिवसाच्या दिवशी सात मैत्रिणींना पेन द्यायचे होते. पेन खरेदी करण्यासाठी ती दुकानात गेली. दुकानदाराने तिला डझनाचा भाव सांगितला.

- विजयाला तुम्ही 7 पेनांची किंमत काढायला मदत करू शकाल का ?
- एका पेनाची किंमत माहीत झाली, तर 7 पेनांची समजेल ना ?



उदा. 15 केळ्यांची फणी 45 रुपयांना मिळते.
8 केळ्यांची किंमत किती ?
15 केळ्यांची किंमत 45 रुपये
$\therefore$ एका केळ्याची किंमत = $45 \div 15 = 3$ रुपये
यावरून, 8 केळ्यांची किंमत $8 \times 3 = 24$ रुपये

उदा. 10 फुलांचा गुच्छ 25 रुपयांना आहे, तर 4 फुलांची किंमत किती ?
10 फुलांची किंमत 25 रुपये
$\therefore$ 1 फुलाची किंमत = $\frac{25}{10}$ रुपये
यावरून, 4 फुलांची किंमत = $\frac{25}{10} \times 4 = 10$ रुपये



हे मला समजले.

अनेक वस्तूंच्या किमतीवरून एका वस्तूची किंमत भागाकार करून काढणे व एका वस्तूच्या किमतीवरून अनेक वस्तूंची किंमत गुणाकार करून काढणे. उदाहरण सोडवण्याच्या या पद्धतीला एकमान पद्धत म्हणतात.

सरावसंच 29

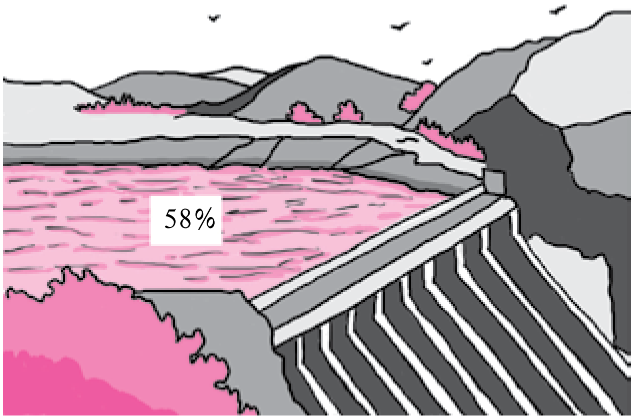
1. सोडवा.

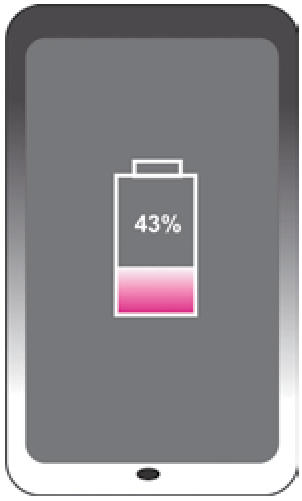
(1) 20 मीटर कापडाची किंमत ₹ 3600 आहे, तर 16 मीटर कापडाची किंमत काढा.
(2) 10 किग्रॅ तांदळाची किंमत ₹ 325 आहे, तर 8 किग्रॅ तांदळाची किंमत काढा.
(3) 14 खुर्च्यांची किंमत ₹ 5992 आहे, तर 12 खुर्च्यांसाठी किती रुपये द्यावे लागतील ?
(4) 30 डब्यांचे वजन 6 किग्रॅ आहे, तर 1080 डब्यांचे वजन किती किग्रॅ होईल ?
(5) समान वेगाने एक कार 165 किमी अंतर 3 तासांत कापते. त्याच वेगाने (अ) 330 किमी अंतर जाण्यास कारला किती तास लागतील ? (ब) 8 तासांत कार किती अंतर कापेल ?
(6) तीन एकर शेतीची मशागत करण्याकरता ट्रॅक्टरला 12 लीटर डिझेल लागते, तर 19 एकर शेतीची मशागत करण्यासाठी किती लीटर डिझेल लागेल ?
(7) एका साखर कारखान्यामध्ये 48 टन उसापासून 5376 किग्रॅ साखर मिळते. सविताताईंच्या शेतात तयार झालेला ऊस 50 टन आहे, तर या उसापासून किती साखर तयार होईल ?
(8) एका आमराईत 8 रांगांत 128 झाडे आहेत. प्रत्येक रांगेतील झाडांच्या संख्या समान असल्यास अशा 13 रांगांत किती झाडे असतील ?
(9) एका शेततळ्यामध्ये 120000 लीटर पाणी साठते. ते शेततळे तयार करण्यासाठी 18000 रुपये खर्च येतो, तर 480000 लीटर पाणी साठवणारी अशी किती शेततळी तयार होतील व त्यांसाठी किती रुपये खर्च येईल ?

12 शेकडेवारी

चला, चर्चा करूया.

पाणी जपून वापरा. धरणातील
पाण्याचा साठा 58%





राजू : दादा, वरील चित्रात मला 58 च्या पुढे % अशी खूण दिसते आहे. तसेच 43 च्या पुढेही ‘%’ ही खूण दिसत आहे. कशाची खूण आहे ती ?

दादा : % ही खूण शेकडेवारीची आहे. शेकडा म्हणजेच शंभर. शेकडेवारीला टक्केवारी किंवा शतमान पद्धत असे देखील म्हणतात.

राजू : शेकडेवारी म्हणजे काय ?

दादा : पहिल्या चित्रात धरणातील पाण्याचा साठा 58% (टक्के) आहे म्हणजेच धरणाची पाणी साठवण्याची क्षमता 100 एकक असेल, तर तशी 58 एकके पाणी सध्या धरणात आहे. मोबाइल फोनची बॅटरी पूर्ण चार्ज झाली असताना 100 एकक चार्ज आहे असे मानले तर आता 43 एकके चार्ज शिल्लक आहे असे दिसते. शेकडा म्हणजेच एकूण भाग 100 आहेत असे मानून केलेली तुलना होय.

राजू : धरणात जर 50% पाणी भरलेले असेल, तर धरण अर्धे भरले आहे असे आपण म्हणू शकतो का ?

दादा : हो, 50% म्हणजे 100 पैकी 50 भाग पाणी आहे. 100 चा अर्धा भाग 50 आहे.

58% म्हणजे 100 एककांपैकी 58 एकक हे अपूर्णांक रूपात $\frac{58}{100}$ असे लिहिता येते.

म्हणजेच धरणाच्या एकूण क्षमतेच्या $\frac{58}{100}$ भाग पाणी आहे.

(1) शेकडेवारीची माहिती अपूर्णांकाच्या रूपात

50% म्हणजे एकूण 100 पैकी 50 भाग म्हणजेच एकूणाचा $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ भाग

25% म्हणजे एकूण 100 पैकी 25 भाग, म्हणजेच एकूणाचा $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ भाग

35% म्हणजे एकूण 100 पैकी 35 भाग, म्हणजेच एकूणाचा $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ भाग

(2) अपूर्णांकाच्या रूपातील माहिती शेकडेवारीमध्ये

$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100}$ एकूणाचा $\frac{3}{4}$ भाग म्हणजे $\frac{75}{100}$ म्हणजेच 75%.

$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 20}{5 \times 20} = \frac{40}{100}$ एकूणाचा $\frac{2}{5}$ भाग म्हणजे $\frac{40}{100}$ म्हणजेच 40%.

हे मला समजले.

छेद 100 करण्यासाठी सममूल्य अपूर्णांकांचा उपयोग होतो.

उदा. गेल्या वर्षी गिरिप्रेमी गटाने वृक्षारोपण कार्यक्रमात 75 झाडे लावली होती. त्यांपैकी 48 झाडांचे संवर्धन उत्तम रीतीने झाले. कर्मवीर गटाने 50 झाडे लावली होती. त्यांपैकी 35 झाडांचे संवर्धन उत्तम रीतीने झाले, तर झाडांचे संवर्धन करण्यात कोणता गट जास्त यशस्वी झाला ?

दोन्ही गटांनी सुरुवातीला लावलेल्या झाडांची संख्या वेगवेगळी आहे. त्यामुळे या लावलेल्या झाडांचा व संवर्धन झालेल्या झाडांचा तुलनात्मक विचार करायला हवा. ही तुलना करण्यासाठी संवर्धन झालेल्या झाडांची शेकडेवारी काढणे उपयोगी ठरेल. त्यासाठी संवर्धन झालेल्या झाडांचे, लावलेल्या झाडांशी गुणोत्तर पाहू.

गिरिप्रेमी गटाने लावलेल्या झाडांपैकी चांगले संवर्धन झालेली झाडे A% मानू.

कर्मवीर गटाने लावलेल्या झाडांपैकी चांगले संवर्धन झालेली झाडे B% मानू.

गिरिप्रेमी गटासाठी संवर्धन झालेली झाडे व लावलेली झाडे यांचे गुणोत्तर $\frac{A}{100}$ आहे तेच $\frac{48}{75}$ देखील आहे. म्हणजे $\frac{A}{100} = \frac{48}{75}$ हे समीकरण मिळते. तसेच कर्मवीर गटासाठी संवर्धन झालेली झाडे व लावलेली झाडे यांचे गुणोत्तर घेऊ. ती गुणोत्तरे दोन रूपांत लिहून समीकरणे मिळवू व सोडवू.

$$\frac{A}{100} = \frac{48}{75} \qquad\qquad \frac{B}{100} = \frac{35}{50}$$

$$\frac{A}{100} \times 100 = \frac{48}{75} \times 100 \qquad\qquad \frac{B}{100} \times 100 = \frac{35}{50} \times 100$$

$$A = 64 \qquad\qquad B = 70$$

$\therefore$ झाडांचे संवर्धन करण्यात कर्मवीर गट जास्त यशस्वी झाला.

उदा. खटाव तालुक्यातील वरूडगावाला 200 शेततळी व जाखणगावाला 300 शेततळी तयार करण्याचे ठरवले होते. त्यांपैकी मे अखेरीस वरूडगावामध्ये 120 शेततळ्यांचे काम पूर्ण झाले, तर जाखणगावात 165 शेततळ्यांचे काम पूर्ण झाल्याचे आढळले, तर शेततळ्यांचे काम पूर्ण होण्याचे प्रमाण कोणत्या गावात जास्त आहे ?

याचे उत्तर शोधण्यासाठी पूर्ण झालेल्या शेततळ्यांची शेकडेवारी काढून तुलना करू.

वरूडगावात पूर्ण झालेल्या शेततळ्यांची संख्या A% मानू आणि जाखणगावात पूर्ण झालेल्या शेततळ्यांची संख्या B% मानू.

पूर्ण झालेल्या शेततळ्यांच्या संख्येचे ठरवण्यात आलेल्या शेततळ्यांच्या संख्येशी घेतलेले गुणोत्तर पाहू. ती गुणोत्तरे दोन रूपांत लिहून समीकरणे मिळवू व सोडवू.

$$\frac{A}{100} = \frac{120}{200}$$

$$\frac{A}{100} \times 100 = \frac{120}{200} \times 100$$

$$A = 60$$

$$\frac{B}{100} = \frac{165}{300}$$

$$\frac{B}{100} \times 100 = \frac{165}{300} \times 100$$

$$B = 55$$

$\therefore$ वरूडगावात शेततळ्यांचे काम पूर्ण होण्याचे प्रमाण जास्त आहे.

उदा. एका शाळेतील 1200 विद्यार्थ्यांपैकी 720 विद्यार्थ्यांना संकलित मूल्यमापनात गणित विषयात 'अ' श्रेणी मिळाली, तर 'अ' श्रेणी मिळालेल्या विद्यार्थ्यांची टक्केवारी किती ?

'अ' श्रेणी मिळालेले विद्यार्थी A% मानू.

'अ' श्रेणी मिळालेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या व एकूण विद्यार्थ्यांची संख्या यांचे गुणोत्तर दोन रूपांत लिहून समीकरण मिळवू व ते समीकरण सोडवू.

$$\frac{A}{100} = \frac{720}{1200}$$

$$\therefore \quad \frac{A}{100} \times 100 = \frac{720}{1200} \times 100$$

$$\therefore \quad A = 60$$

$\therefore$ 'अ' श्रेणी मिळालेल्या विद्यार्थ्यांची टक्केवारी 60 आहे.

उदा. एका समाजसेवी संस्थेने एका जिल्ह्यातील 400 शाळांपैकी 18% शाळा दत्तक घेतल्या, तर दत्तक घेतलेल्या एकूण शाळा किती ?

दत्तक घेतलेल्या शाळांच्या संख्येचे एकूण शाळांच्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर दोन प्रकारांनी मांडून समीकरण मिळवू व सोडवू.

18% म्हणजे 100 पैकी 18 शाळा दत्तक घेतल्या.

एकूण शाळा 400 आहेत. त्यांपैकी दत्तक घेतलेल्या शाळा A आहेत असे मानू.

$$\frac{A}{400} = \frac{18}{100}$$

$$\therefore \quad \frac{A}{400} \times 400 = \frac{18}{100} \times 400$$

$$\therefore \quad A = 72$$

$\therefore$ दत्तक घेतलेल्या शाळांची संख्या 72 आहे.

सरावसंच 30

(1) एका परीक्षेत शबानाला 800 पैकी 736 गुण मिळाले, तर तिला किती टक्के गुण मिळाले ?

(2) दहिहांडा गावातील शाळेत 500 विद्यार्थी आहेत. त्यांपैकी 350 विद्यार्थ्यांना पोहता येते, तर किती टक्के विद्यार्थ्यांना पोहता येते आणि किती टक्के विद्यार्थ्यांना पोहता येत नाही ?

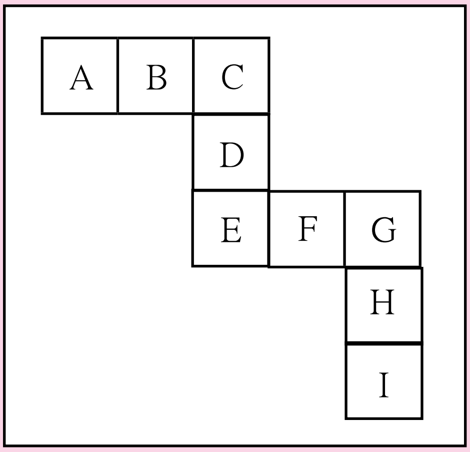
(3) प्रकाशने शेतातील 19500 चौमी शेतजमिनीपैकी 75% जमिनीत ज्वारी पेरली, तर त्याने किती चौमी जागेत ज्वारी पेरली ?

(4) सोहमला त्याच्या वाढदिवसाच्या दिवशी एकूण 40 मेसेजेस आले. त्यांपैकी 90% मेसेजेस वाढदिवसाच्या शुभेच्छा देणारे होते, तर त्याला वाढदिवसाच्या शुभेच्छांव्यतिरिक्त किती मेसेजेस आले ?

(5) एका गावातील 5675 लोकांपैकी 5448 लोक साक्षर आहेत, तर गावाची साक्षरता किती टक्के आहे ?

(6) एका निवडणुकीत जांभूळ गावातील 1200 महिलांपैकी 1080 महिलांनी मतदान केले, तर वडगावातील 1700 महिलांपैकी 1360 महिलांनी मतदान केले. कोणत्या गावातील मतदान करणाऱ्या महिलांचे प्रमाण जास्त आहे ?

गणिती गंमत!



वरील आकृतीत नऊ चौरस दिले आहेत. या चौरसांत A, B, C, D, E, F, G, H, I ही अक्षरे लिहिलेली आहेत. या अक्षरांसाठी 1 ते 9 यांपैकी अंक असे लिहा, की प्रत्येक अक्षरासाठी वेगळा अंक वापरला जाईल. तसेच A + B + C = C + D + E = E + F + G = G + H + I असेल.

13 नफा–तोटा

चला, चर्चा करूया.

प्रणवच्या साहित्य खरेदीचा तपशील

भाज्या – ₹ 70

बटर – ₹ 25

पाव – ₹ 45

मसाला – ₹ 14

इतर साहित्य – ₹ 20

एकूण -----------

विक्री करून मिळालेली रक्कम : ₹ 160

प्रणवने एकूण किती खर्च केला ?
तो नाराज का आहे ?

सरिताच्या साहित्य खरेदीचा तपशील

प्लेट – ₹ 20

चमचे – ₹ 10

चटणी – ₹ 30

मुरमुरे – ₹ 50

कांदे – ₹ 20

इतर साहित्य – ₹ 60

एकूण -----------

विक्री करून मिळालेली रक्कम : ₹ 230

सरिताने भेळेसाठी एकूण किती खर्च केला ?
सरिता आनंदी का दिसत आहे ?

चला, चर्चा करूया.

सरिताने सगळे साहित्य दुपटीने आणले असते, तर तिला दुप्पट फायदा झाला असता का ?
पुन्हा स्टॉल लावताना प्रणवने काय करावे म्हणजे पावभाजी जास्त विकली जाईल व फायदा होईल ?

जाणून घेऊया.

नफा–तोटा

पैसे कमवण्यासाठी लोक वेगवेगळी कामे करतात. ग्राहकांना हव्या असलेल्या वस्तू विकण्याचा व्यवसाय दुकानदार करतात. ठोक व्यापाऱ्याकडून म्हणजेच घाऊक व्यापाऱ्याकडून मोठ्या प्रमाणात स्वस्त दराने वस्तू आणल्या जातात. त्याची किंमत छापील किमतीपेक्षा कमी असते. वस्तू सुट्या करून छापील किमतीला विकल्या की जास्त रक्कम मिळते. विक्रीची किंमत खरेदीच्या किमतीपेक्षा जास्त असेल, तर फायदा होतो. त्याला **नफा** म्हणतात. कधी कधी खरेदीच्या किमतीपेक्षा कमी रक्कम विक्रीतून मिळते, तेव्हा होणाऱ्या नुकसानाला **तोटा** म्हणतात.

हे मला समजले.

खरेदीपेक्षा विक्री कमी असेल तेव्हा तोटा होतो.
तोटा = खरेदी किंमत – विक्री किंमत

खरेदीपेक्षा विक्री जास्त असते तेव्हा नफा होतो.
नफा = विक्री किंमत – खरेदी किंमत

उदा. हमीदभाईंनी 2000 रुपयांची केळी विकत घेतली व ती सर्व केळी 1890 रुपयांस विकली, तर या व्यवहारात त्यांना नफा झाला की तोटा ? किती ?

2000 रुपयांस केळी विकत घेतली म्हणजे
खरेदीची किंमत = ₹ 2000
विक्रीची किंमत = ₹ 1890
येथे खरेदीची किंमत ही विक्रीच्या किमतीपेक्षा जास्त आहे. म्हणून या व्यवहारात हमीदभाईंना तोटा झाला.

तोटा = खरेदी किंमत – विक्री किंमत
= 2000 – 1890
= ₹ 110

∴ या व्यवहारात हमीदभाईंना 110 रुपये तोटा झाला.

उदा. हरभजनसिंग यांनी 500 किलोग्रॅम तांदूळ 22000 रुपयांस विकत घेतला व प्रति किलोग्रॅम 48 रुपयांनी सर्व तांदूळ विकला, तर त्यांना किती रुपये नफा झाला ?

500 किलोग्रॅम तांदळाची खरेदीची किंमत 22000 रुपये आहे.

∴ 500 किलोग्रॅम तांदळाची विक्रीची किंमत
= 500 × 48 = 24000 रुपये

विक्रीची किंमत खरेदीच्या किमतीपेक्षा जास्त आहे म्हणून नफा झाला.

नफा = विक्री किंमत – खरेदी किंमत
= 24000 – 22000
= ₹ 2000

∴ या व्यवहारात हरभजनसिंग यांना 2000 रुपये नफा झाला.

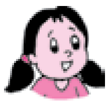
1. पुढील सारणीत खरेदी व विक्री दिली आहे. त्यावरून नफा झाला की तोटा हे ठरवा व तो किती ते लिहा.

उदा.	खरेदी (रुपये)	विक्री (रुपये)	नफा की तोटा	किती रुपये ?
1.	4500	5000		
2.	4100	4090		
3.	700	799		
4.	1000	920		

2. दुकानदाराने एक सायकल 3000 रुपयांना खरेदी केली व तीच सायकल 3400 रुपयांस विकली, तर त्याला किती नफा झाला ?
3. सुनंदाबाईंनी 475 रुपयांना दूध खरेदी केले. त्या दुधाचे दही करून ते 700 रुपयांना विकले, तर त्यांना किती नफा झाला ?
4. दिवाळीत जिजामाता महिला बचतगटाने चकल्या तयार करण्यासाठी 15000 रुपयांचा कच्चा माल खरेदी केला. तयार झालेल्या चकल्या विकून त्यांना 22050 रुपये मिळाले, तर बचतगटाला किती नफा झाला ?
5. प्रमोदने घाऊक बाजारातून मेथीच्या 100 जुड्या 400 रुपयांना खरेदी केल्या. अचानक आलेल्या पावसामुळे त्याच्या हातगाडीवरील 30 जुड्या भिजून खराब झाल्या. उरलेल्या जुड्या त्याने 5 रुपयांना एक याप्रमाणे विकल्या, तर त्याला नफा झाला की तोटा ? किती ?
6. शरदने एक क्विंटल कांदे 2000 रुपयांना खरेदी केले. नंतर त्याने 18 रुपयांना एक किलोग्रॅम या दराने सर्व कांदे विकले, तर या व्यवहारात त्याला नफा झाला की तोटा ? किती ?
7. कांताबाईंनी ठोक व्यापाऱ्याकडून 25 साड्या 10000 रुपयांना खरेदी केल्या व या सर्व साड्या त्यांनी 460 रुपयांना एक या दराने विकल्या, तर या व्यवहारात कांताबाईंना किती नफा होईल ?

एकूण खरेदी व नफा–तोटा

एका शाळेत दिवाळीनिमित्त 'पणती रंगवा' हा उपक्रम घेतला. त्यासाठी 1000 रुपयांना 1000 पणत्या खरेदी केल्या. 200 रुपयांचे रंग आणले. पणत्या शाळेत आणण्यासाठी 100 रुपये वाहतूक खर्च आला. रंगवलेल्या पणत्या 2 रुपयांस एक याप्रमाणे विकल्या, तर या व्यवहारात नफा झाला की तोटा व किती ?



पणत्यांची खरेदी किंमत 1000 रुपये व विक्री किंमत 2000 रुपये, म्हणजे 1000 रुपये नफा झाला.

- अंजूचे म्हणणे बरोबर आहे का ?
- रंग व वाहतुकीच्या खर्चाचे काय ?
- पणत्या विकण्यापूर्वी त्यासाठी एकूण किती खर्च झाला ?
- पणत्या रंगवून विकल्या, या व्यवहारात किती नफा झाला ?

खरेदीशिवाय वाहतूक खर्च, हमाली, जकात खर्च इत्यादी प्रकारचा खर्च करावा लागतो. मूळ खरेदीत हा खर्च मिळवला म्हणजे एकूण खरेदी मिळते.

हे मला समजले.

खरेदी-विक्रीचा व्यवहार करताना एखादी वस्तू विकण्यापूर्वी तिच्यासाठी करावा लागणारा सर्व खर्च हा खरेदी किमतीमध्ये मिळवावा लागतो. तिला एकूण खरेदी किंमत म्हणतात.

विचार करा.

शेतकरी शेतात पिकवलेला माल विकतो. त्या वेळी त्याची एकूण खरेदी किंमत कशी काढायची ?
शेतकऱ्याला शेतमाल विकेपर्यंत त्या मालासाठी कोणकोणते खर्च करावे लागतात ?
बियाणे, खते आणि वाहतूक खर्च यांखेरीज आणखी कोणता खर्च असतो ?

उदा. संभाजीरावांनी एक यंत्र 80000 रुपयांस कारखान्यातून खरेदी केले. ते यंत्र आणताना त्यांना 1600 रुपये कर भरावा लागला, 800 रुपये वाहतूक खर्च आला व 300 रुपये हमाली द्यावी लागली. ते यंत्र त्यांनी एक लाख रुपयांस विकले, तर त्यांना किती नफा झाला ?

यंत्र खरेदीसाठी झालेला एकूण खर्च

= यंत्राची किंमत + कर + वाहतूक खर्च + हमाली

= 80000 + 1600 + 800 + 300

= ₹ 82700

म्हणजेच एकूण खरेदी 82700 रुपये झाली.

नफा = विक्री किंमत - एकूण खरेदी किंमत

= 100000 - 82700

= ₹ 17300

या व्यवहारात संभाजीरावांना 17300 रुपये नफा झाला.

उदा. जावेदभाईंनी 4300 रुपयांस एक याप्रमाणे 35 मिक्सर खरेदी केले. ते दुकानात आणण्यासाठी त्यांना 2100 रुपये खर्च आला व त्यांना या व्यवहारात 21000 रुपये नफा अपेक्षित आहे, तर त्यांनी प्रत्येक मिक्सर किती किमतीस विकावा ?

एका मिक्सरची खरेदीची किंमत = ₹ 4300

$\therefore$ 35 मिक्सरची खरेदीची किंमत = 4300 $\times$ 35 = ₹ 150500

मिक्सरची एकूण खरेदी = मिक्सरची एकूण किंमत + वाहतूक खर्च

= 150500 + 2100

= ₹ 152600

जावेदभाईंना 21000 रुपये नफा हवा आहे.

∴ विक्रीनंतर अपेक्षित रक्कम

= 152600 + 21000

= ₹ 173600

35 मिक्सरची एकूण विक्री = ₹ 173600

∴ 1 मिक्सरची विक्री किंमत = 173600 ÷ 35

= ₹ 4960

जावेदभाईंना प्रत्येक मिक्सर 4960 रुपयांस विकावा लागेल.

```
       4960
35) 173600
  − 140
    0336
  −  315
    00210
  −   210
    00000
  −     0
        0
```

सरावसंच 32

1. संतोषने ठोक व्यापाऱ्याकडून 400 अंडी 1500 रुपयांना आणली. त्यासाठी वाहतूक खर्च 300 रुपये आला. त्यांतील 50 अंडी खाली पडून फुटली. उरलेली अंडी त्याने 5 रुपयांस एक याप्रमाणे विकली. त्याला फायदा झाला की तोटा ? किती ?
2. अब्राहम यांनी 50000 रुपयांचा माल खरेदी केला. कर व वाहतूक खर्च मिळून त्यांना 7000 रुपये खर्च आला. त्यांनी तो माल जर 65000 रुपयांस विकला असेल, तर त्यांना या व्यवहारात नफा झाला की तोटा ? किती ?
3. अजित कौर यांनी साखरेचे 50 किलोग्रॅम वजनाचे एक पोते 1750 रुपयांस आणले. साखरेचा भाव कमी झाल्यामुळे त्यांना ती साखर प्रति किलोग्रॅम 32 रुपये दराने विकावी लागली, तर त्यांना किती रुपये तोटा झाला ?
4. कुसुमताईंनी 700 रुपयांना एक कुकर याप्रमाणे 80 कुकर खरेदी केले. त्यासाठी वाहतूक खर्च 1280 रुपये आला. त्यांना एकूण 18000 रुपये नफा हवा असल्यास त्यांनी प्रत्येक कुकर केवढ्यास विकावा ?
5. इंद्रजीत यांनी 12000 रुपयांना एक याप्रमाणे 10 फ्रीज खरेदी केले. ते आणण्यासाठी त्यांना 5000 रुपये वाहतूक खर्च आला. त्यांनी प्रत्येक फ्रीज केवढ्यास विकावा म्हणजे त्यांना 20000 रुपयांचा फायदा होईल ?
6. ललिताबाईंनी 13700 रुपयांचे बियाणे शेतात पेरले. खते व औषध फवारणीसाठी 5300 रुपये आणि मजुरीसाठी 7160 रुपये खर्च आला. शेतातील धान्य विकून त्यांना 35400 रुपये मिळाले, तर त्यांना धान्य विकून किती नफा किंवा तोटा झाला?

जाणून घेऊया.

शेकडा नफा, शेकडा तोटा

नफा किंवा तोटा यांची शेकडेवारी ठरवताना त्यांची तुलना खरेदीच्या किमतीशी करतात. जेव्हा 10% नफा किंवा तोटा झाला असे म्हणतात, तेव्हा एकूण खरेदी 100 रुपये असल्यास नफा किंवा तोटा 10 रुपये असतो.

उदा. अब्बासने 400 रुपयांची भाजी खरेदी करून ती 650 रुपयांना विकली, तर बलबीरने 300 रुपयांची फळे खरेदी करून ती 500 रुपयांना विकली. कोणाचा व्यवहार जास्त फायदेशीर झाला ?

अब्बासला 250 रुपये नफा झाला, तर बलबीरला 200 रुपये नफा झाला. प्रत्येकाच्या खरेदीची किंमत मात्र वेगवेगळी आहे. तुलना करण्यासाठी नफ्याची शेकडेवारी काढावी लागेल.

अब्बासचा नफा A% तर बलबीरचा नफा B% मानू. नफ्याचे खरेदीच्या किमतीशी गुणोत्तर घेऊ. ती गुणोत्तरे दोन रूपांत मांडून समीकरणे मिळवू व सोडवू.

$$\frac{A}{100} = \frac{250}{400}$$

$$\frac{A}{100} \times 100 = \frac{250 \times 100}{400}$$

$$A = \frac{250}{4} = \frac{125}{2} = 62\frac{1}{2}$$

$$\frac{B}{100} = \frac{200}{300}$$

$$\frac{B}{100} \times 100 = \frac{200 \times 100}{300}$$

$$B = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$$

$\therefore$ बलबीरचा व्यवहार जास्त फायदेशीर झाला.

उदा. सीमाने 800 रुपयांची भाजी खरेदी केली व 40 रुपये गाडीभाडे देऊन ती दुकानात आणली. सर्व भाजी विकून तिला 966 रुपये मिळाले, तर तिला नफा झाला की तोटा ? शेकडा किती ?

शेकडा नफा किंवा तोटा काढण्यासाठी एकूण खरेदी काढू.

एकूण खरेदी = मूळ खरेदी + गाडी भाडे
= 800 + 40
= ₹ 840

नफा = विक्री किंमत – एकूण खरेदी किंमत
= 966 – 840
= ₹ 126

शेकडा Y नफा झाला असे मानू. नफ्याचे एकूण खरेदीशी गुणोत्तर घेऊ. ते गुणोत्तर दोन रूपांत मांडून समीकरण मिळवू व सोडवू.

$$\frac{Y}{100} = \frac{126}{840}$$

$$\frac{Y}{100} \times 100 = \frac{126}{840} \times \frac{100}{1}$$

$$Y = 15$$

$\therefore$ सीमाला शेकडा 15 नफा झाला.

सरावसंच 33

1. मगनलालने 400 रुपयांची पँट 448 रुपयांना विकली. 200 रुपयांचा शर्ट 250 रुपयांना विकला, तर यांपैकी कोणता व्यवहार अधिक फायदेशीर झाला ?
2. रामरावने 4500 रुपयांस खरेदी केलेले कपाट 4950 रुपयांस विकले. तर शामरावने 3500 रुपयांस खरेदी केलेले शिलाई यंत्र 3920 रुपयांस विकले, तर यांपैकी कोणाचा व्यवहार अधिक फायदेशीर झाला ?
3. हनीफने 50 सफरचंदाची एक पेटी 400 रुपयांना खरेदी केली. ती सर्व सफरचंदे त्याने 10 रुपयांस एक याप्रमाणे विकली, तर त्याला नफा झाला की तोटा ? किती टक्के ?

जाणून घेऊया.

दिलेल्या माहितीच्या आधारे शेकडा नफा व शेकडा तोटा यांवर आधारित शाब्दिक उदाहरणे तयार करणे व सोडवणे.

माहिती : खरेदी 23500 रुपये, वाहतूक खर्च 1200 रुपये, कर 300 रुपये, विक्री 24250 रुपये

तयार केलेले उदाहरण

- जोसेफ यांनी एक मशीन 23500 रुपयांना विकत घेतले. ते आणताना वाहतूक खर्च 1200 रुपये झाला, शिवाय त्यांना 300 रुपये कर भरावा लागला. त्यांनी ते मशीन गिऱ्हाइकास 24250 रुपयांना विकले, तर जोसेफ यांना नफा झाला की तोटा ? किती टक्के ?

मशीनची एकूण खरेदी

= 23500 + 1200 + 300

= ₹ 25000

विक्रीची किंमत = 24250 रुपये

विक्रीपेक्षा खरेदी जास्त म्हणून तोटा झाला.

तोटा = खरेदी किंमत - विक्री किंमत

= 25000 - 24250

= ₹ 750

जोसेफ यांना 750 रुपये तोटा झाला.

तोटा N% असेल तर तोटा व खरेदी किंमत हे गुणोत्तर दोन रूपांत लिहू व समीकरण सोडवू.

$$\frac{N}{100} = \frac{750}{25000}$$

$$\therefore \frac{N}{100} \times 100 = \frac{3}{100} \times 100$$

$$\therefore N = 3$$

जोसेफ यांना 3% तोटा झाला.

माहिती : 700 रुपये, 18 वस्तू, 18900 रुपये

तयार केलेले उदाहरण

- सरिताबेन यांनी 700 रुपयांस एक याप्रमाणे 18 खुर्च्या खरेदी केल्या व 18900 रुपयांस त्या सर्व खुर्च्या विकल्या, तर त्यांना नफा झाला की तोटा ? किती टक्के ?

एका खुर्चीची खरेदीची किंमत 700 रुपये

∴ 18 खुर्च्यांची खरेदीची किंमत

= 700 × 18 = ₹ 12600

सर्व खुर्च्यांची विक्रीची किंमत 18900 रुपये

विक्रीची किंमत खरेदीपेक्षा जास्त आहे. म्हणून नफा झाला.

नफा = विक्री किंमत - खरेदी किंमत

= 18900 - 12600

= ₹ 6300

सरिताबेन यांना 6300 रुपये नफा झाला.

नफा N% असेल तर नफा व खरेदी हे गुणोत्तर दोन रूपांत लिहू व समीकरण सोडवू.

$$\frac{N}{100} = \frac{6300}{12600}$$

$$\therefore \frac{N}{100} \times 100 = \frac{63}{126} \times 100$$

$$\therefore N = \frac{63 \times 100}{126}$$

$$\therefore N = 50$$

सरिताबेन यांना 50% नफा झाला.

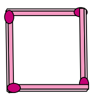
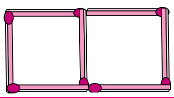
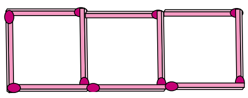
सरावसंच 34

माहितीच्या आधारे शेकडा नफ्याचे किंवा शेकडा तोट्याचे शाब्दिक उदाहरण तयार करा व सोडवा.

1. खरेदी 1600 रुपये, विक्री 2800 रुपये.
2. खरेदी 2000 रुपये, विक्री 1900 रुपये.
3. 1200 रुपयांस एक याप्रमाणे 8 वस्तूंची खरेदी, प्रत्येक वस्तूची विक्री 1400 रुपये.
4. 50 किग्रॅ धान्याची खरेदी 2000 रुपये, प्रति किलोग्रॅम विक्री 43 रुपये.
5. 8600 रुपये खरेदी, वाहतूक खर्च 250 रुपये, हमाली 150 रुपये, विक्री 10000 रुपये.
6. बियाणे 20500 रुपये, मजुरी 9700 रुपये, औषधे व खते 5600 रुपये, विक्री 28640 रुपये.

उपक्रम :
- तुम्हांला अनुभवास आलेली नफा-तोट्याची उदाहरणे सांगा. उदाहरणरूपात त्यांची मांडणी करा व ती सोडवा.
- आनंद मेळा भरवा. वस्तूंच्या विक्रीचा अनुभव घ्या. वस्तू किंवा पदार्थ तयार करण्यासाठी किती खर्च झाला ? विक्री किती झाली ? या व्यवहाराचे लेखन किंवा नाट्यीकरण करा.

गणिती गंमत!

चौरसांची संख्या				
काड्यांची संख्या	4	7	10	

अर्पिताने 4 काड्यांचा एक चौरस केला. अजून 3 काड्या घेऊन 2 चौरस तयार होतील अशी रचना केली. अजून तीन काड्या घेऊन 3 चौरस तयार केले. याचप्रकारे एकूण 7 चौरस तयार होण्यासाठी किती काड्या वापराव्यात ? 50 चौरस तयार करण्यासाठी किती काड्या वापराव्यात ?

14 बँक व सरळव्याज

जरा आठवूया.

वरील चित्र कशाचे आहे ? या कार्यालयात कोणते काम केले जाते, याची माहिती घ्या. निरीक्षणे नोंदवा.

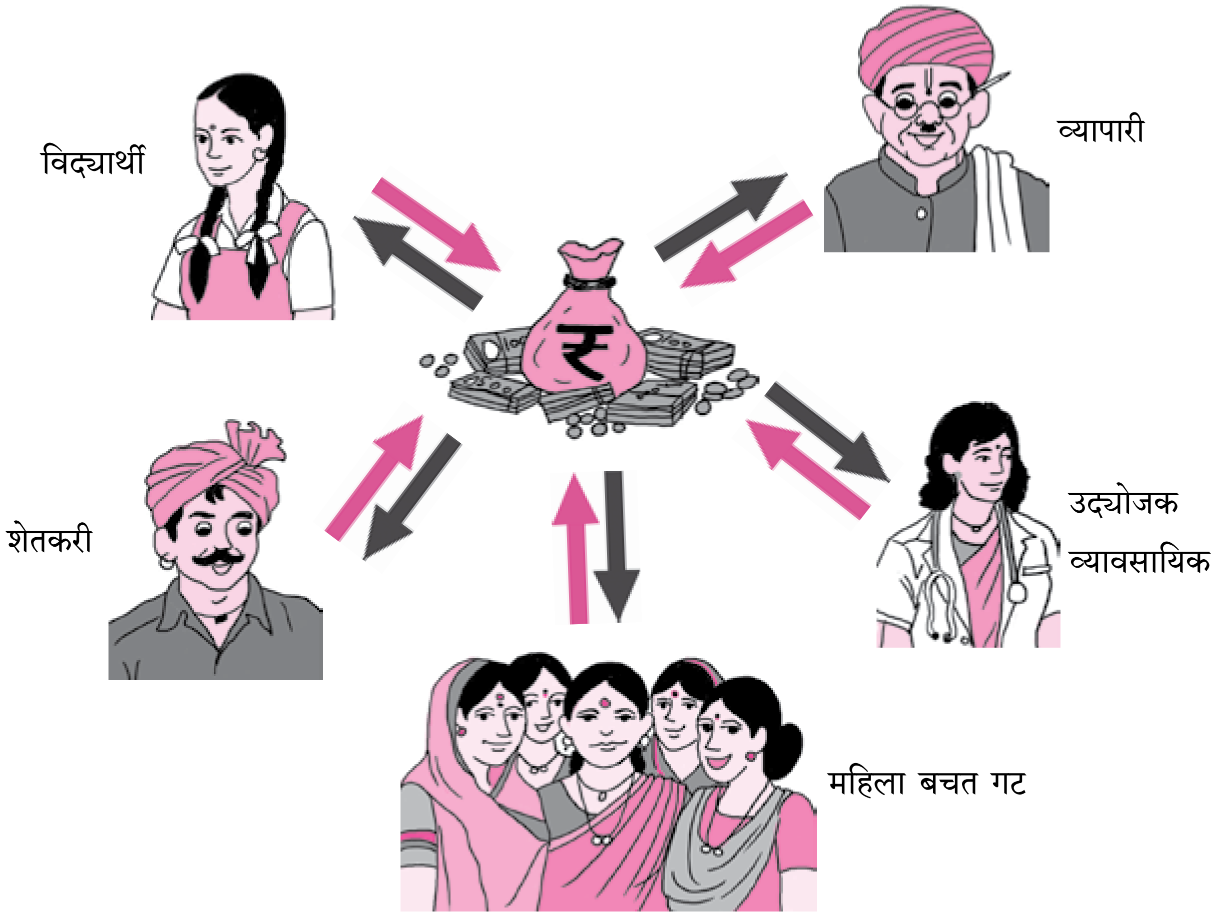
जाणून घेऊया.

बँक

बँक ही पैशांचे व्यवहार करणारी सरकारमान्य संस्था असते. ती एक **वित्तीय संस्था** असते. (वित्त म्हणजेच पैसा).

आपण जो पैसा मिळवतो तो काळजीपूर्वक खर्च करायला हवा. भविष्यातील गरजेसाठी आपण पैशांची बचत करतो. ही बचत शिक्षण, घर बांधकाम, वैद्यकीय खर्च, व्यवसाय, शेती सुधारणा इत्यादींसाठी करायची असते. नियमितपणे केलेली छोटी बचत पुढे मोठी बनते व ती भविष्यातही उपयोगी ठरते. बँकेत ठेवलेली रक्कम सुरक्षित राहते व काळानुसार तिच्यात वाढ होते.

आर्थिक व्यवहार



- वरील चित्रांत कोणकोणत्या व्यक्ती बँकेशी व्यवहार करताना दाखवल्या आहेत ?
- मधोमध दाखवलेल्या थैलीवरील चिन्ह कशाचे आहे ?
- वरील चित्रांतील बाणांमुळे काय समजते ?

उपक्रम

- शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांची बँकेत क्षेत्रभेट आयोजित करावी. विद्यार्थ्यांना बँकेची प्राथमिक माहिती मिळवण्यास प्रवृत्त करावे. विविध फॉर्म, स्लिप भरण्यास मदत करावी.
- जवळपास बँक नसल्यास शिक्षकांनी वरील नमुने उपलब्ध करून भरून घ्यावेत.
- शाळेमध्ये अभिरूप बँक उघडून बँकेतील व्यवहारांचे प्रात्यक्षिक दाखववावे.
- बँकेच्या व्यवहारांची सविस्तर माहिती बँकेत काम करणारे पालक किंवा बँकेचे कर्मचारी यांच्या सहकार्याने करून द्यावी.

जाणून घेऊया.

बँकेतील खाती

बँकेचे व्यवहार करण्यासाठी बँकेत खाते उघडावे लागते. बँकेत नवीन खाते उघडताना खालील कागदपत्रांची आवश्यकता असते.

(1) पत्त्यासंदर्भात पुरावा : रेशनकार्ड, वीज बिल, टेलिफोन बिल, रहिवासी दाखला, ओळखपत्र इत्यादी.

(2) ओळखीचा पुरावा : आधारकार्ड, मतदान ओळखपत्र, पॅन कार्ड, पासपोर्ट किंवा बँकेने सुचवलेल्या पुराव्यांपैकी एक तसेच खातेदार असणाऱ्या ग्राहकाचा संदर्भ.

सर्वांना बचतीची सवय लागावी याकरिता बचत खाते असते. खातेदार त्या खात्यात उपलब्धतेनुसार रक्कम जमा करू शकतो.जरुरीप्रमाणे त्यातून तो काही वेळा रक्कम काढू शकतो.

बचत खात्यामध्ये असलेल्या रकमेवर बँका 4% ते 6% व्याज देतात. बचत खात्यावर व्यवहार करण्यासाठी खातेदारास पासबुक, चेकबुक, एटीएम (ATM) कार्ड, मोबाइल बँकिंग, एस.एम.एस. बँकिंग, इंटरनेट बँकिंग इत्यादी सुविधा मिळतात.

बँकेत पैसे भरण्याकरता तसेच बँकेतून पैसे काढण्याकरता विशिष्ट छापील नमुन्यात फॉर्म भरावा लागतो. प्रत्येक बँकेचा फॉर्म वेगळा असतो. तरीही त्यात भरायची माहिती सारखीच असते.

बँकेत चालू खाते असाही एक प्रकार असतो. त्यातून कितीही वेळा रक्कम काढता येते, पण त्या खात्यातील रकमेवर व्याज मिळत नाही. अधिक कालावधीसाठी ठेव ठेवल्यावर जास्त व्याज मिळण्यासाठी मुदत बंद ठेव (FD - Fixed Deposit), आवर्ती ठेव (R.D. - Recurring Deposit) अशा सोई असतात.

व्याज आकारणी

बँक ठेवीदारांना बँकेत पैसे ठेवल्याबद्दल काही रक्कम मोबदला म्हणून देते. तसेच कर्जदारांना पैसे वापरायला दिल्याबद्दल बँक त्यांच्याकडून मोबदला म्हणून काही रक्कम आकारते. अशा रकमेला **व्याज** म्हणतात. बँकेत ठेवलेल्या किंवा बँकेकडून कर्जदारास दिलेल्या रकमेला **मुद्दल** म्हणतात.

ठेवीवर किंवा कर्जावर व्याज आकारताना त्याचा दर हा प्रत्येक 100 रुपयांवर दिला जातो. व्याजाचा दर किती काळासाठी आहे हे सांगितले जाते. व्याजाचा **द.सा.द.शे.** दर याचा अर्थ दर सालासाठी म्हणजे प्रत्येक वर्षासाठी दर शंभर रुपयांसाठी द्यायचे व्याज.

मुद्दल ज्या कालावधीसाठी वापरले जाते त्या कालावधीला **मुदत** म्हणतात.

सरळव्याज

या इयत्तेत आपण फक्त एक वर्षासाठी आकारल्या जाणाऱ्या व्याजाचा विचार करणार आहोत. हे सरळव्याज आहे. अधिक काळासाठी व्याजाची आकारणी अनेकदा जास्त गुंतागुंतीची असते. ती सरळव्याजापेक्षा वेगळी असते.

उदा 1. विनिताने द.सा.द.शे. 7 दराने बँकेत 15000 रुपये 1 वर्षासाठी ठेव म्हणून ठेवले, तर तिला वर्ष अखेरीस किती व्याज मिळेल ?

या उदाहरणात मुद्दल 15000 रुपये, मुदत 1 वर्ष, व्याजाचा दर शेकडा 7 आहे.

मुद्दल वाढले तर व्याज वाढते म्हणजे मुद्दलाच्या प्रमाणात व्याज वाढते.

15000 रुपये मुद्दलावर x रुपये व्याज मिळेल असे मानू.

100 रुपये मुद्दलावर 7 रुपये व्याज दिले आहे.

व्याजाचे मुद्दलाशी असलेले गुणोत्तर घेऊ. हे गुणोत्तर दोन रूपांत मांडून समीकरण मिळवू.

$$\frac{x}{15000} = \frac{7}{100}$$

$$\frac{x}{15000} \times 15000 = \frac{7}{100} \times 15000 \qquad \text{(दोन्ही बाजूंना 15000 ने गुणू)}$$

$$x = 1050$$

विनिताला एकूण 1050 रुपये व्याज मिळेल.

उदा 2. विलासरावांनी विहिरीवर मोटर पंप बसवण्यासाठी द.सा.द.शे. 8 दराने बँकेकडून रुपये 20000 कर्ज घेतले. एका वर्षानंतर ते बँकेस किती रक्कम देतील ?

वरील उदाहरणात मुद्दल 20000 रुपये आहे. द.सा.द.शे. 8 दराने म्हणजे 100 रुपये मुद्दलावर 1 वर्षाचे व्याज 8 रुपये आहे.

मुद्दलाच्या प्रमाणात व्याज बदलते म्हणजे व्याज व मुद्दल यांचे गुणोत्तर कायम आहे. व्याजाचे मुद्दलाशी असलेले गुणोत्तर दोन प्रकारांनी लिहून समीकरण मिळवू.

20000 रुपये मुद्दलावर मिळणारे व्याज x रुपये मानू.

100 रुपये मुद्दलावर मिळणारे व्याज 8 रुपये आहे.

$$\frac{x}{20000} = \frac{8}{100}$$

$$\frac{x}{20000} \times 20000 = \frac{8}{100} \times 20000 \qquad \text{(दोन्ही बाजूंना 20000 ने गुणू)}$$

$$x = 1600$$

बँकेस परत देण्याची रक्कम = मुद्दल + व्याज = 20000 + 1600 = ₹ 21600

सरावसंच 35

(1) द.सा.द.शे. 10 दराने 6000 रुपयांचे एका वर्षाचे व्याज किती होईल ?

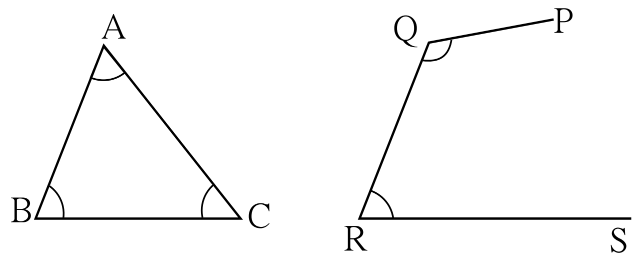
(2) महेशने 8650 रुपये द.सा.द.शे. 6 दराने एक वर्षासाठी बँकेत ठेवले, तर एक वर्षानंतर महेशला एकूण किती रुपये मिळतील ?

(3) अहमदचाचांनी बँकेकडून 25000 रुपये कर्ज घेतले. व्याजाचा दर दरसाल 12% असल्यास एका वर्षानंतर त्यांना बँकेस किती रुपये परत करावे लागतील ?

(4) शेततळे तयार करण्यासाठी किसनरावांनी बँकेकडून रुपये 35250 द.सा.द.शे. 6 दराने एक वर्षासाठी घेतले, तर त्यांना वर्ष अखेरीस बँकेस किती रुपये व्याज द्यावे लागेल ?

15 त्रिकोण व त्रिकोणाचे गुणधर्म

चला, चर्चा करूया.



शेजारील आकृत्यांमध्ये काही बिंदू व त्यांना जोडणारे रेषाखंड काढले आहेत.

त्यांतील कोणती आकृती त्रिकोणाची आहे ? कोणती आकृती त्रिकोणाची नाही व का ?

ΔABC ला तीन बाजू आहेत. रेषाखंड AB ही या त्रिकोणाची एक बाजू आहे. उरलेल्या बाजूंची नावे लिहा. ΔABC ला तीन कोन आहेत. त्यांपैकी $\angle$ABC हा एक कोन आहे. उरलेल्या कोनांची नावे लिहा.

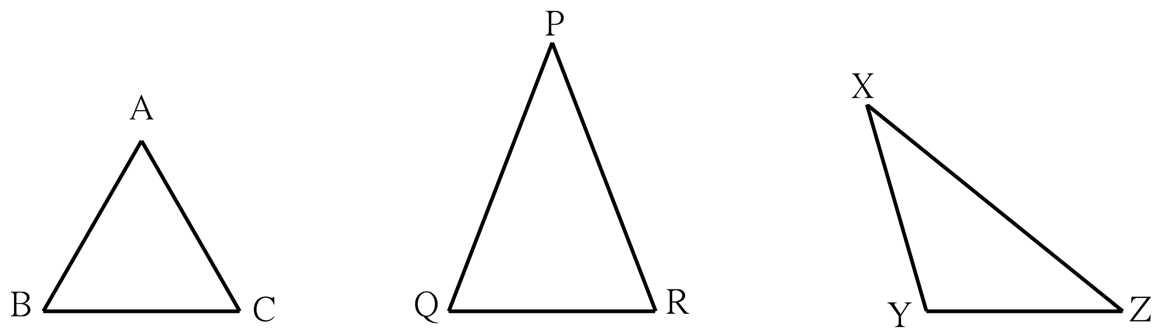
बिंदू A, बिंदू B, बिंदू C यांना त्रिकोणाचे शिरोबिंदू म्हणतात.

जाणून घेऊया.

तीन नैकरेषीय बिंदू रेषाखंडांनी जोडून तयार होणाऱ्या बंदिस्त आकृतीला त्रिकोण असे म्हणतात.
त्रिकोणाचे शिरोबिंदू, बाजू व कोन यांना त्रिकोणाचे घटक म्हणतात.

त्रिकोणाचे प्रकार – बाजूंवरून

खालील त्रिकोणांतील बाजूंच्या लांबी, कर्कटक व मोजपट्टीच्या साहाय्याने सेंटिमीटरमध्ये मोजा. खालील सारणीत नोंदवा. त्यांची वैशिष्ट्ये लक्षात घ्या. रेषाखंड AB ची लांबी ही l(AB) ने दर्शवतात.



ΔABC मध्ये	ΔPQR मध्ये	ΔXYZ मध्ये
l(AB) = ... सेमी	l(QR) = ... सेमी	l(XY) = ... सेमी
l(BC) = ... सेमी	l(PQ) = ... सेमी	l(YZ) = ... सेमी
l(AC) = ... सेमी	l(PR) = ... सेमी	l(XZ) = ... सेमी

मागील सारणीतील आकृत्यांमध्ये, ΔABC मध्ये सर्व बाजूंची लांबी समान आहे म्हणून ΔABC हा समभुज त्रिकोण आहे. सम म्हणजे समान व भुज म्हणजे बाजू.

ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू समान लांबीच्या असतात, त्या त्रिकोणाला समभुज त्रिकोण म्हणतात.

ΔPQR मध्ये बाजू PQ व बाजू PR या दोन बाजूंची लांबी समान आहे म्हणून ΔPQR हा समद्विभुज त्रिकोण आहे. सम म्हणजे समान, द्वि म्हणजे दोन व भुज म्हणजे बाजू.

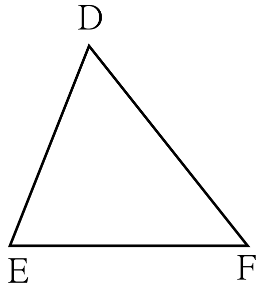
ज्या त्रिकोणाच्या दोन भुजा समान लांबीच्या असतात, त्या त्रिकोणास समद्विभुज त्रिकोण म्हणतात.

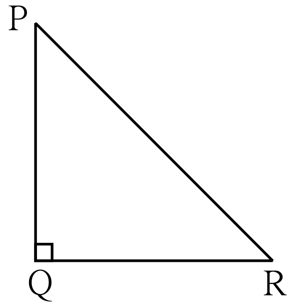
ΔXYZ च्या तिन्ही बाजूंची लांबी वेगवेगळी आहे म्हणून ΔXYZ हा विषमभुज त्रिकोण आहे. येथे विषम म्हणजे समान नसणे.

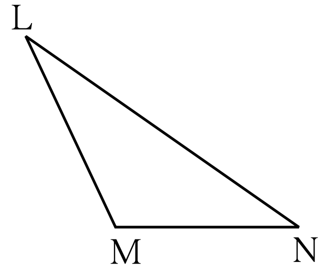
ज्या त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजू समान लांबीच्या नसतात, त्या त्रिकोणास विषमभुज त्रिकोण म्हणतात.

त्रिकोणांचे प्रकार – कोनांवरून

खालील त्रिकोणाच्या सर्व कोनांची मापे मोजा व तक्त्यात नोंदवा. ∠D चे माप $m\angle D$ ने दर्शवतात.







ΔDEF मध्ये	ΔPQR मध्ये	ΔLMN मध्ये
∠D चे माप = $m\angle D$ = ...°	∠P चे माप = $m\angle P$ = ...°	∠L चे माप = ...°
∠E चे माप = $m\angle E$ = ...°	∠Q चे माप = ... = ...°	∠M चे माप = ...°
∠F चे माप = ... = ...°	∠R चे माप = ... = ...°	∠N चे माप = ...°
निरीक्षण : तीनही कोन लघुकोन आहेत.	एक कोन काटकोन व दोन कोन लघुकोन आहेत.	एक कोन विशालकोन व दोन कोन लघुकोन आहेत.

वरील आकृत्यांमधील ΔDEF हा लघुकोन त्रिकोण आहे.

ज्या त्रिकोणाचे तीनही कोन लघुकोन असतात, त्या त्रिकोणास लघुकोन त्रिकोण म्हणतात.

ΔPQR हा काटकोन त्रिकोण आहे.

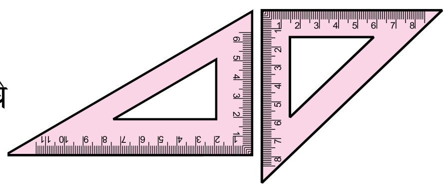
ज्या त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन असतो, त्या त्रिकोणास काटकोन त्रिकोण म्हणतात.

ΔLMN हा विशालकोन त्रिकोण आहे.

ज्या त्रिकोणाचा एक कोन विशालकोन असतो, त्या त्रिकोणास विशालकोन त्रिकोण म्हणतात.

हे करून पाहा.

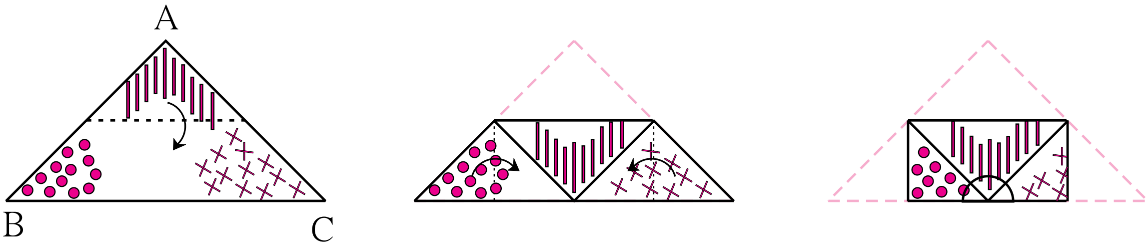
कंपासपेटीतील त्रिकोणी गुण्यांचे निरीक्षण करा. ते कोणत्या प्रकारचे त्रिकोण आहेत ते लिहा.



हे करून पाहा.

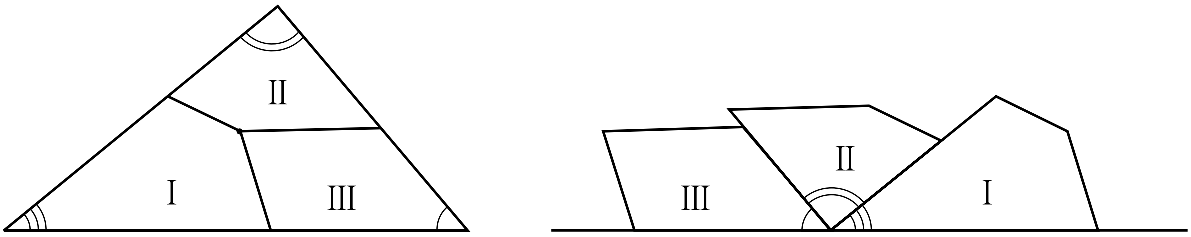
त्रिकोणाचे गुणधर्म

कृती : एक त्रिकोणाकृती कागद घ्या. तिन्ही कोनांचे कोपरे दोन्ही बाजूंनी (पाठपोट) एकाच रंगाने रंगवा किंवा तिन्ही कोपऱ्यांवर वेगवेगळ्या खुणा करा. कागदावर खालील चित्रात दाखवल्याप्रमाणे दोन बाजूंच्या मध्यावर घडी घाला.



$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

कृती : एक त्रिकोणाकृती कागद घेऊन तीनही कोनांवर वेगवेगळ्या खुणा करा. त्रिकोणाच्या साधारणपणे मध्यावर एक बिंदू घेऊन त्याच्यापासून तीनही बाजूंना छेदणाऱ्या तीन रेषा काढा. त्या रेषांवर कागद कापा. तीन कोन आकृतीत दिल्याप्रमाणे जुळवून पाहा.



त्रिकोणाचे तीनही कोन मिळून एक सरळ कोन म्हणजेच 180° मापाचा कोन होतो हा गुणधर्म अनुभवा.

हे मला समजले.

त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.

कृती : कागदावर कोणताही एक त्रिकोण काढा. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंना A, B, C अशी नावे द्या. कर्कटक व पट्टीच्या साहाय्याने त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंची लांबी मोजा व निरीक्षणे नोंदवा.

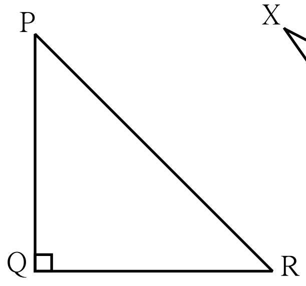
प्रत्येक बाजूची लांबी	दोन बाजूंच्या लांबींची बेरीज	तिसऱ्या बाजूंची लांबी
l(AB) = ... सेमी	l(AB) + l(BC) = ... सेमी	l(AC) = ... सेमी
l(BC) = ... सेमी	l(BC) + l(AC) = ... सेमी	l(AB) = ... सेमी
l(AC) = ... सेमी	l(AC) + l(AB) = ... सेमी	l(BC) = ... सेमी

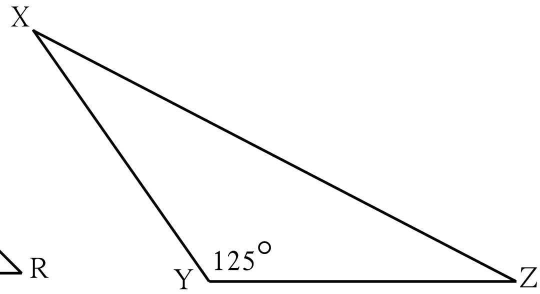
हे मला समजले.

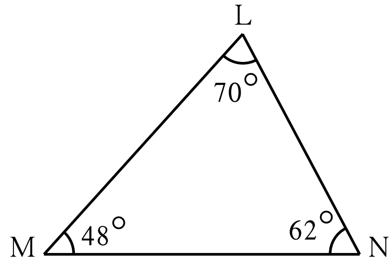
त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंच्या लांबींची बेरीज ही तिसऱ्या बाजूच्या लांबीपेक्षा नेहमी मोठी असते.

सरावसंच 36

(1) खालील आकृत्यांचे निरीक्षण करा. कोनांवरून त्रिकोणाचा प्रकार लिहा.

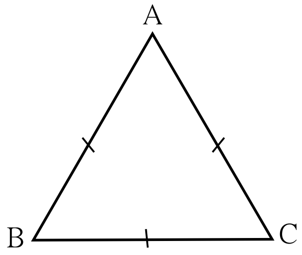


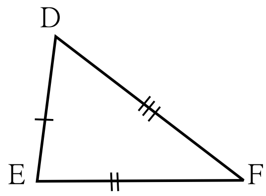


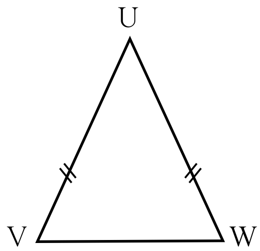


ΔPQR हा … त्रिकोण आहे. ΔXYZ हा … त्रिकोण आहे. ΔLMN हा … त्रिकोण आहे.

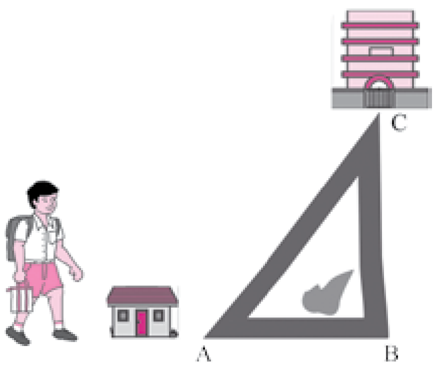
(2) खालील आकृत्यांचे निरीक्षण करा. बाजूंवरून होणारा त्रिकोणाचा प्रकार लिहा.







ΔABC हा … त्रिकोण आहे. ΔDEF हा … त्रिकोण आहे. ΔUVW हा … त्रिकोण आहे.



(3) आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे अविनाश आपल्या घराजवळ उभा आहे. त्याला शाळेत जाण्यासाठी दोन मार्ग आहेत. त्यांतील कोणत्या मार्गाने गेल्यास कमी अंतर पडेल ? कारण सांगा.

(4) खाली त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लांबी दिल्या आहेत. त्यावरून त्रिकोणाचा प्रकार लिहा.

(1) 3 सेमी, 4 सेमी, 5 सेमी
(2) 3.4 सेमी, 3.4 सेमी, 5 सेमी
(3) 4.3 सेमी, 4.3 सेमी, 4.3 सेमी
(4) 3.7 सेमी, 3.4 सेमी, 4 सेमी

(5) त्रिकोण काढण्यासाठी खाली काही बाजूंच्या लांबी दिल्या आहेत. या लांबीच्या बाजू असणारे त्रिकोण काढता येतील का नाही, ते ठरवा. कारण लिहा.

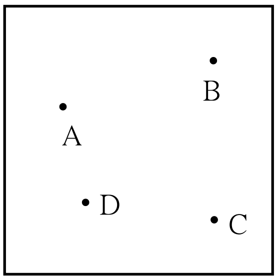
(1) 17 सेमी, 7 सेमी, 8 सेमी
(2) 7 सेमी, 24 सेमी, 25 सेमी
(3) 9 सेमी, 6 सेमी, 16 सेमी
(4) 8.4 सेमी, 16.4 सेमी, 4.9 सेमी
(5) 15 सेमी, 20 सेमी, 25 सेमी
(6) 12 सेमी, 12 सेमी, 16 सेमी

16 चौकोन

जाणून घेऊया.

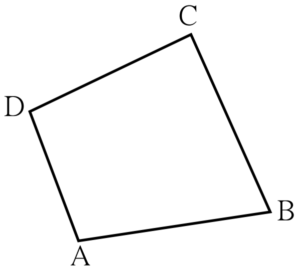
चौकोन

कागदावर A, B, C, D हे चार बिंदू असे घ्या, की कोणतेही तीन बिंदू नैकरेषीय असतील. ते बिंदू एकमेकांना जोडून एक बंदिस्त आकृती तयार करायची आहे, मात्र कोणतेही दोन बिंदू जोडले तर उरलेले दोन बिंदू त्या रेषेच्या एकाच बाजूला असावेत.

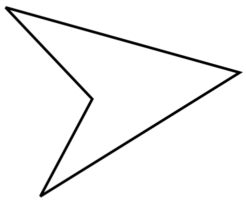


दिलेला नियम पाळून तयार झालेल्या आकृतीला **चौकोन** म्हणतात.

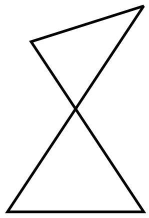
खालीलपैकी कोणत्या आकृत्या चौकोनाच्या आहेत, निरीक्षणे नोंदवा.



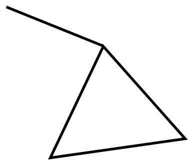
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

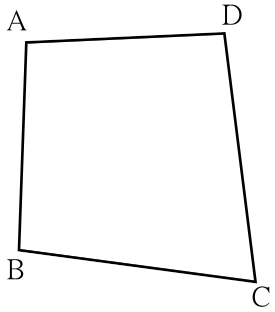
येथे आकृती (i) चौकोनाची आहे.

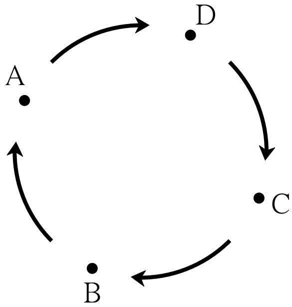
चौकोन ABCD ही त्रिकोणाप्रमाणे एक बंदिस्त आकृती आहे. ज्या चार रेषाखंडांपासून चौकोन तयार होतो त्यांना चौकोनाच्या **बाजू** म्हणतात. रेख AB, रेख BC, रेख CD व रेख AD या चौकोनाच्या चार बाजू (भुजा) आहेत. बिंदू A, B, C, D हे चौकोन ABCD चे **शिरोबिंदू** आहेत.

चौकोनाचे वाचन व लेखन

- **घड्याळ्याच्या काट्याच्या दिशेने किंवा घड्याळ्याच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने क्रमाने कोणत्याही शिरोबिंदूपासून सुरुवात करून चौकोनाला नाव देता येते.**

चौकोनाचे लेखन करताना चौकोन या शब्दाऐवजी '□' अशी खूण करतात.



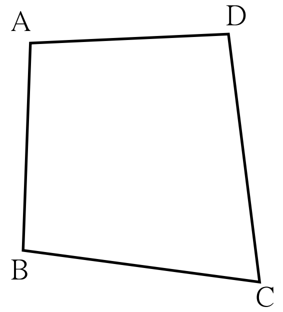


वाचन	लेखन
चौकोन ADCB	□ ADCB
चौकोन DCBA	□ DCBA
चौकोन CBAD	□ CBAD
चौकोन BADC	□ BADC

कोणत्याही शिरोबिंदूपासून सुरुवात करून घड्याळाच्या काट्याच्या विरूद्ध दिशेच्या क्रमाने वरील चौकोनाची नावे लिहा.

जाणून घेऊया.

चौकोनाच्या लगतच्या बाजू



□ABCD च्या बाजू AB व बाजू AD यांचा A हा सामाईक शिरोबिंदू आहे. बाजू AB व बाजू AD या **लगतच्या** बाजू आहेत.

शेजारील आकृतीवरून लगतच्या बाजूंच्या जोड्या लिहा.

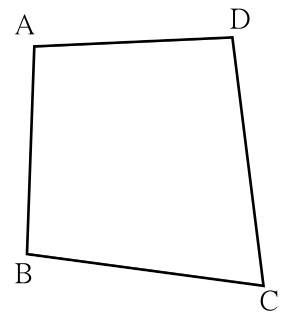
(1) .... व .... (2) .... व ....

(3) .... व .... (4) .... व ....

प्रत्येक चौकोनामध्ये लगतच्या बाजूंच्या चार जोड्या असतात.

चौकोनाच्या लगतच्या बाजूंमध्ये एक सामाईक शिरोबिंदू असतो.

चौकोनाच्या संमुख बाजू



□ABCD मध्ये बाजू AB व बाजू DC यांमध्ये कोणताच शिरोबिंदू सामाईक नाही. बाजू AB व बाजू DC या चौकोनाच्या **संमुख बाजू** म्हणजेच **समोरासमोरील बाजू** आहेत.

शेजारील चौकोनाच्या संमुख बाजूंच्या जोड्या लिहा.

संमुख बाजूंच्या जोड्या

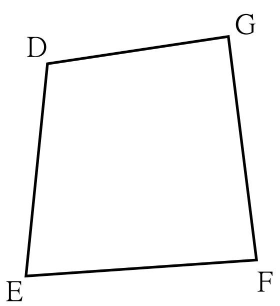
(1) .... व .... (2) .... व ....

चौकोनाच्या संमुख म्हणजे समोरासमोरील बाजूंमध्ये सामाईक शिरोबिंदू नसतो.

चौकोनाचे लगतचे कोन

चार वेगवेगळ्या लांबींचे स्ट्रॉ/काड्या/पट्ट्या एकमेकांना जोडा. चौकोन तयार करा.

त्याची आकृती काढा. □DEFG तयार होईल. ∠DEF व ∠GFE या दोन कोनांसाठी रेख EF ही बाजू दोन्ही कोनांमध्ये सामाईक आहे. म्हणून ते कोन लगतचे म्हणजे शेजारचे कोन आहेत.



शेजारील चौकोनाच्या लगतच्या कोनांच्या जोड्या लिहा.

(1) .... व .... (2) .... व ....

(3) .... व .... (4) .... व ....

चौकोनाच्या ज्या दोन कोनांमध्ये एक बाजू सामाईक असते त्या कोनांना चौकोनाचे लगतचे कोन म्हणतात.

चौकोनाचे संमुख कोन

□DEFG मध्ये ∠DEF व ∠DGF यांची एकही बाजू सामाईक नाही. ∠DEF व ∠DGF हे दोन्ही कोन समोरासमोर आहेत म्हणून त्यांना **संमुख कोन** म्हणजेच **समोरासमोरील** कोन म्हणतात.

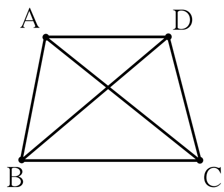
आकृतीमधील इतर संमुख कोनांची नावे लिहा.

1. ∠EFG चा संमुख कोन .... 2. ∠FGD चा संमुख कोन ....

चौकोनाच्या ज्या दोन कोनांमध्ये एकही बाजू सामाईक नसते त्या कोनांना चौकोनाचे संमुख म्हणजेच समोरासमोरचे कोन म्हणतात.

चौकोनाचा कर्ण

□ABCD मध्ये ∠A आणि ∠C तसेच ∠B आणि ∠D या संमुख कोनांच्या शिरोबिंदूना जोडणारे रेषाखंड काढले आहेत. रेख AC व रेख BD हे चौकोन ABCD चे कर्ण आहेत. कर्ण AC हा ∠A व ∠C या संमुख कोनांचे शिरोबिंदू जोडतो.

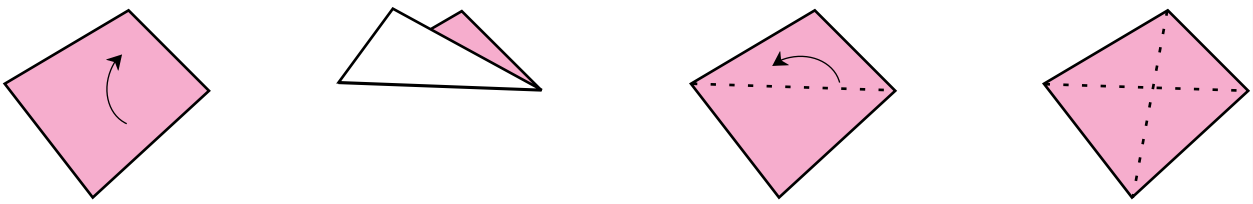


चौकोनाच्या संमुख कोनांचे शिरोबिंदू जोडणारे रेषाखंड म्हणजे चौकोनाचे कर्ण असतात.

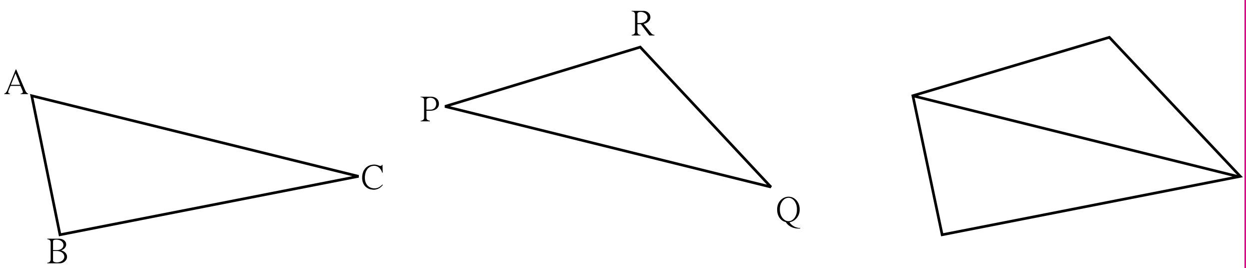
वरील आकृतीत कर्ण BD हा कोणत्या दोन संमुख कोनांचे शिरोबिंदू जोडतो ?

हे करून पाहा.

- एक चौकोनाकृती कागद कापा. त्यांचे संमुख शिरोबिंदू जोडणारी घडी घाला. तयार झालेल्या घडीला काय म्हणता येईल?

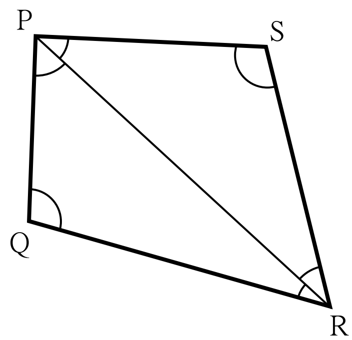


- दोन त्रिकोणाकृती कागद घ्या. त्यांतील एका त्रिकोणाची एक बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या एका बाजूएवढी असली पाहिजे. ΔABC व ΔPQR मध्ये AC व PQ या बाजू समान आहेत असे समजू.



आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे ते त्रिकोण समान बाजू शेजारी शेजारी येतील असे जोडा. कोणती आकृती मिळते ? चौकोन तयार होण्यासाठी दोन त्रिकोण वापरले. त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते, तर चौकोनाच्या चारही कोनांच्या मापांची बेरीज किती होईल ?

हे करून पाहा.



एक चौकोन काढा. चौकोनाचा एक कर्ण काढून त्याचे दोन त्रिकोणांत विभाजन करा. कोनांची मापे मोजा. चारही कोनांच्या मापांची बेरीज तयार झालेल्या दोन त्रिकोणांच्या सहा कोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढी आहे का ?

चौकोनाच्या चार कोनांच्या मापांची बेरीज ही दोन्ही त्रिकोणांच्या सहा कोनांच्या बेरजेएवढी आहे, हे अनुभवा.

$\therefore$ चौकोनाच्या चार कोनांच्या मापांची बेरीज $= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

हे मला समजले.

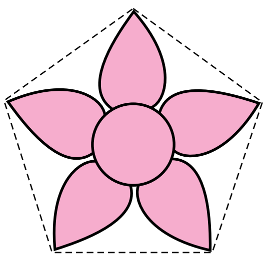
चौकोनाच्या चारही कोनांच्या मापांची बेरीज 360° असते.

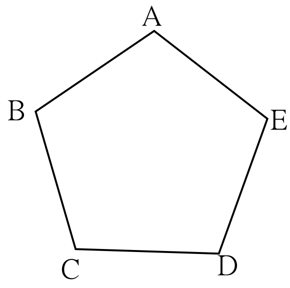
जाणून घेऊया.

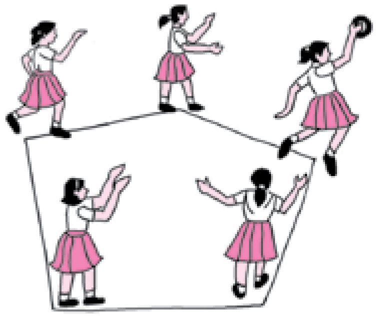
बहुभुजाकृती

- एकेरी तगर, कुंद अथवा सदाफुली यांची पाच पाकळ्यांची उमललेली फुले पाहिली आहेत ना ?

त्यांतल्या एका फुलाचे चित्र काढा. चित्रांतील पाकळ्यांची टोके क्रमाने जोडत जा. कोणती आकृती मिळते ? याप्रमाणे पाच बिंदूंना पाच रेषाखंडांनी जोडून तयार केलेली जी बंदिस्त आकृती मिळते, तिला **पंचकोन** म्हणतात.







(1) पंचकोनाच्या शिरोबिंदूंची नावे लिहा.

(2) पंचकोनाच्या बाजूंची नावे लिहा.

(3) पंचकोनाच्या कोनांची नावे लिहा.

(4) एखादा खेळ खेळत असताना खेळाडूंच्या स्थानांची रचना पंचकोनी झालेली दिसते का, ते पाहा.

त्रिकोण, चौकोन, पंचकोन आणि पाचपेक्षा जास्त बाजू असलेल्या बंदिस्त आकृतीला **बहुभुजाकृती** म्हणतात.

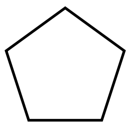
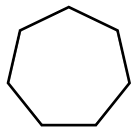
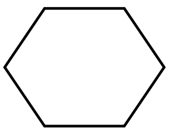
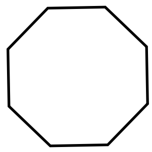
हे करून पाहा.

पंचकोनी आकाराचा कागद कापा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे तुटक रेषेवर घडी घालून अथवा कापून किती त्रिकोण मिळतील ? पंचकोनांच्या पाच कोनांची बेरीज शोधा बरं !

- आणखी वेगळ्या प्रकारे घड्या घालून मिळणारे त्रिकोण तयार करा. निरीक्षण नोंदवा.

सरावसंच 37

1. खालील आकृत्यांचे निरीक्षण करा व त्यांची नावे लिहा.

	आकृती	नाव		आकृती	नाव
(1)			(3)		
(2)			(4)		

हे करून पाहा.

वर्गातील चार मित्रांनी आपल्या कंपासपेटीतील समान आकारांचे गुण्ये घ्या, ते वेगवेगळ्या पद्धतीने एकमेकांशी जोडा. कोणत्या आकृत्या तयार होतील, त्यांची नावे लिहा.

(a) दोन गुण्ये (b) तीन गुण्ये (c) चार गुण्ये

सरावसंच 38

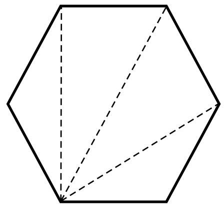
1. □XYZW काढा व त्यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) संमुख कोनांच्या जोड्या लिहा.
(2) संमुख बाजूंच्या जोड्या लिहा.
(3) लगतच्या बाजूंच्या जोड्या लिहा.
(4) लगतच्या कोनांच्या जोड्या लिहा.
(5) चौकोनाच्या कर्णांची नावे लिहा.
(6) चौकोनाची नावे वेगवेगळ्या प्रकारे लिहा.

2. रिकाम्या चौकटींत बहुभुजाकृतींच्या बाजूंची संख्या लिहा.

नावे	चौकोन	अष्टकोन	पंचकोन	सप्तकोन	षटकोन
बाजूंची संख्या					

3. आपल्या परिसरात आढळणारी बहुभुजाकृतींची उदाहरणे शोधा. त्यांच्या आकृत्या काढा.
4. विविध फुलांच्या पाकळ्यांची टोके रेघेने जोडून होणाऱ्या आकृतीमध्ये बहुभुजाकृती दिसतात, त्यांच्या आकृत्या काढा व बाजूंच्या संख्या लिहा.
5. एक बहुभुजाकृती काढा व तिचे शेजारी दाखवल्याप्रमाणे त्रिकोणाकृती भाग करा. त्यावरून तिच्या सर्व कोनांच्या मापांची बेरीज किती होईल ते ठरवा.



ICT Tools or Links

कॉम्प्युटरमधील Paint या प्रोग्रॅमच्या मदतीने वेगवेगळ्या बहुभुजाकृती काढा व रंगवा. Geogebra या सॉफ्टवेअरच्या मदतीने सुसम बहुभुजाकृती तयार करा.

कापरेकर संख्या

सर्व अंक समान नसलेली कोणतीही चार अंकी संख्या घ्या.
तिच्यातील अंक उतरत्या क्रमाने लिहून नवीन चार अंकी संख्या मिळवा.
नव्या संख्येतील अंक चढत्या क्रमाने लिहून आणखी एक नवीन संख्या मिळवा.
या दोन नवीन संख्यांपैकी मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करा. येणारी वजाबाकी ही चार अंकी संख्या असेल. वजाबाकी तीन अंकी आल्यास सहस्रस्थानी 0 हा अंक लिहा.
वजाबाकी करून आलेल्या संख्येवर वरीलप्रमाणेच क्रिया पुन्हा पुन्हा करत राहा.
काही वेळा क्रिया केल्यावर तुम्हांला 6174 ही संख्या मिळेल. यानंतरही क्रिया करत राहिल्यास 6174 हीच संख्या पुन्हा पुन्हा मिळेल. आपण 8531 पासून सुरू करू.
पाहा. 8531 ⟶ 7173 ⟶ 6354 ⟶ 3087 ⟶ 8352 ⟶ 6174 ⟶ 6174
हा शोध गणिततज्ज्ञ दत्तात्रय रामचंद्र कापरेकर यांनी लावला आहे. म्हणून 6174 ही संख्या, **कापरेकर संख्या** म्हणून ओळखली जाते.

17 भौमितिक रचना

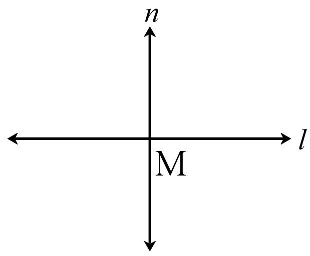
सांगा पाहू !

(1) इमारत बांधताना भिंत अगदी सरळ उभी राहावी म्हणून काय युक्ती करत असतील ?
या चित्रात गवंड्याच्या हातात काय आहे ?
त्याचा उपयोग तो कशासाठी करत असेल ?

(2) रस्त्यावरील दिव्याचे खांब पाहिलेत का ? ते कसे उभे असतात ?

हे करून पाहा.

लंब

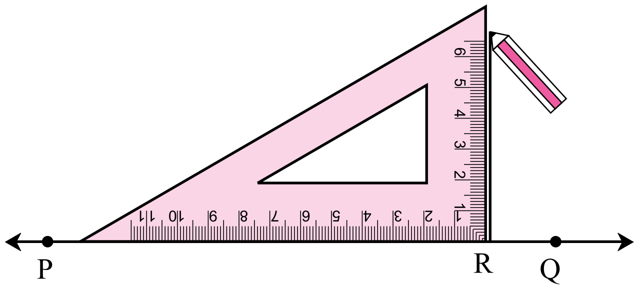


बाजूच्या आकृतीत रेषा l आणि रेषा n या एकमेकींना बिंदू M मध्ये छेदल्या आहेत. बिंदू M जवळ होणारा प्रत्येक कोन मोजा.

रेषा l व रेषा n मधील कोन काटकोन असेल, तर त्या रेषा एकमेकींना **लंब** आहेत असे म्हणतात. हेच 'रेषा $l \perp$ रेषा n' असे चिन्हाने दर्शवतात. त्याचे वाचन 'रेषा l लंब रेषा n' असे करतात.

रेषेवरील बिंदूतून त्या रेषेला लंब काढणे

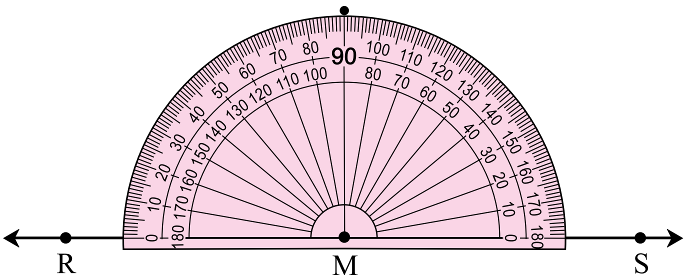
(1) गुण्याचा उपयोग करून

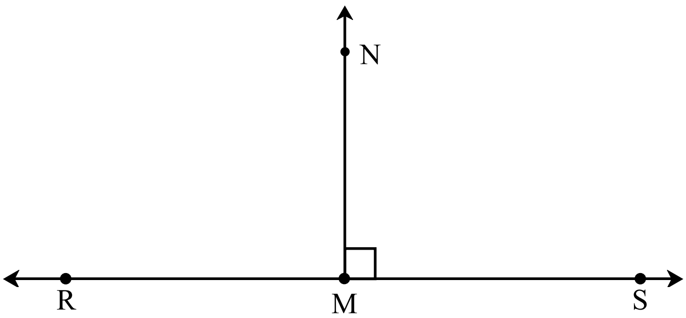


- रेषा PQ काढा. या रेषेवर कोठेही R बिंदू घ्या.
- गुण्या असा ठेवा, की गुण्याचा काटकोन करणारा बिंदू हा R या बिंदूवर येईल आणि काटकोन करणारी एक भुजा रेषा PQ शी जुळेल.

- गुण्याच्या काटकोन करणाऱ्या दुसऱ्या बाजूच्या कडेने रेषा RS काढा.
- रेषा RS ही रेषा PQ ला R बिंदूत लंब आहे.

(2) कोनमापकाचा उपयोग करून

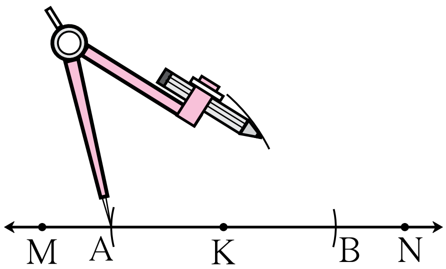


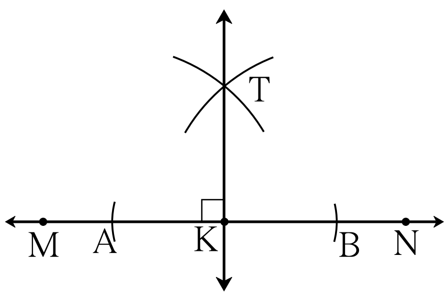


- रेषा RS काढा. रेषेवर कोठेही M बिंदू घ्या.
- M मधून रेषा RS ला लंब काढण्यासाठी आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे कोनमापकाचा केंद्रबिंदू M वर ठेवा.
- कोनमापकाच्या 90° च्या खुणेवर बिंदू N काढा.
- M आणि N बिंदूंतून जाणारी रेषा काढा.
- रेषा MN ही रेषा RS ला M बिंदूत लंब आहे हे लक्षात घ्या.

  रेषा MN $\perp$ रेषा RS

(3) कंपासचा उपयोग करून





- रेषा MN काढा. रेषेवर कोठेही K बिंदू घ्या.
- कंपासचे लोखंडी टोक K बिंदूवर ठेवा. K बिंदूच्या दोन्ही बाजूंना समान अंतरावर रेषेला छेदणारे दोन कंस काढा. त्यांच्या छेदनबिंदूंना अनुक्रमे A व B ही नावे द्या.
- कंपासमध्ये AB अंतराच्या निम्म्यापेक्षा जास्त व सोईचे अंतर घ्या. कंपासचे टोक A बिंदूवर ठेवा आणि आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे रेषेच्या एका अंगास एक कंस काढा.
- तेच अंतर कायम ठेवून कंपासचे टोक B बिंदूवर ठेवा आणि पूर्वीच्या कंसाला छेदणारा आणखी एक कंस काढा.
- दोन्ही कंसांच्या छेदनबिंदूला T नाव द्या.
- K आणि T बिंदूंतून जाणारी रेषा काढा.

  रेषा KT ही रेषा MN ला K बिंदूत लंब आहे.

  रेषा KT $\perp$ रेषा MN

विचार करा.

कंपासमध्ये AB च्या निम्म्यापेक्षा जास्त अंतर का घ्यायचे ? कमी अंतर घेतले तर काय होईल ?

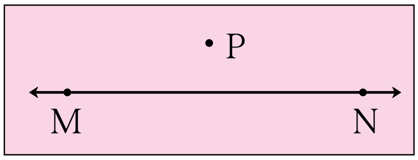
सरावसंच 39

1. रेषा *l* काढा. रेषेवर कोठेही बिंदू P घ्या. गुण्याच्या मदतीने बिंदू P मधून रेषा *l* वर लंब काढा.
2. रेषा AB काढा. कंपासच्या मदतीने B बिंदूतून रेषा AB वर लंब काढा.
3. रेषा CD काढा. रेषेवर कोठेही बिंदू M घ्या. कोनमापकाच्या साहाय्याने बिंदू M मधून रेषा CD वर लंब काढा.

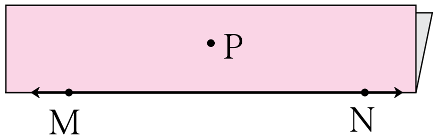
रेषेबाहेरील बिंदूतून रेषेला लंब काढणे

(1) कागदाला घड्या घालून

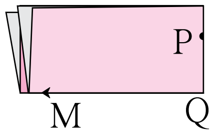
- कागदावर रेषा MN काढा. रेषेबाहेर कोठेही बिंदू P घ्या.



- रेषा MN आपणांस दिसेल अशा रीतीने कागद उलटून रेषा MN वर घडी घाला.

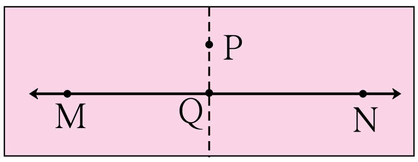


- कागदाला P बिंदूवर आणखी एक अशी घडी घाला, की घडीच्या एका बाजूस असलेला रेषा MN चा एक भाग हा घडीच्या दुसऱ्या बाजूस असलेल्या रेषा MN च्या भागाशी जुळेल.

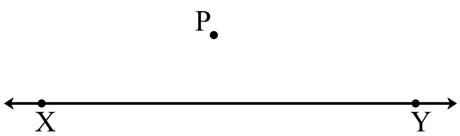


- कागदाच्या घड्या उलगडा. दोन्ही घड्यांच्या छेदनबिंदूला Q हे नाव द्या. रेषा PQ काढा. ही रेषा घडीवरच येते.

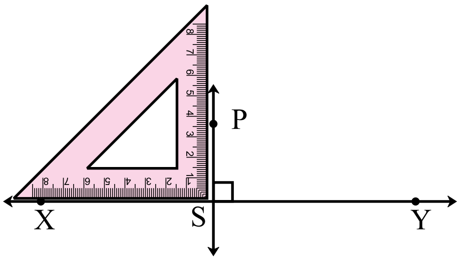
Q बिंदूजवळील प्रत्येक कोन कोनमापकाने तपासा.
रेषा PQ ही रेषा MN ला लंब आहे.
रेषा PQ $\perp$ रेषा MN



(2) गुण्याचा उपयोग करून

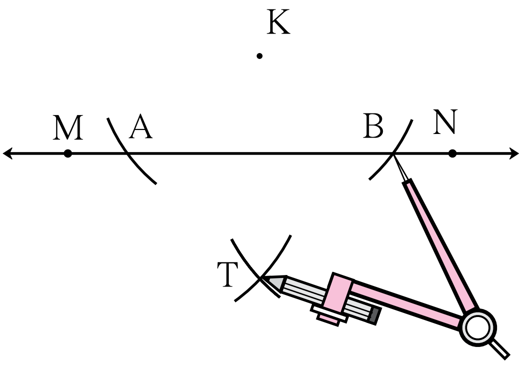


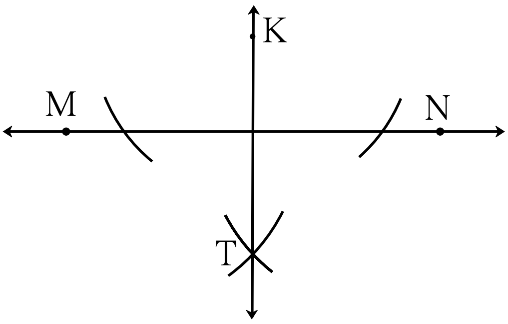
- रेषा XY काढा. या रेषेबाहेर कोठेही P बिंदू घ्या.
- गुण्याच्या काटकोन करणाऱ्या बाजूंपैकी एक बाजू रेषा XY ला जुळवून ठेवा.



- गुण्या रेषेवर असा सरकवा, की गुण्याची काटकोन करणारी दुसरी बाजू P बिंदूला चिकटेल. या बाजूलगत P बिंदूतून जाणारी रेषा PS काढा.
  कोन मोजा व रेषा लंब आहेत का हे तपासा.

(3) कंपास व पट्टी यांचा उपयोग करून





- रेषा MN काढा. रेषेबाहेर कोठेही K बिंदू घ्या.
- कंपासचे टोक K बिंदूवर ठेवून कंपासमध्ये सोईस्कर अंतर घ्या. रेषा MN ला A व B या दोन बिंदूंत छेदणारे कंस काढा.
- कंपासमधे AB अंतराच्या निम्म्यापेक्षा जास्त अंतर घ्या. कंपासचे टोक A बिंदूवर ठेवा आणि रेषेच्या खालील अंगास एक कंस काढा.
- कंपासमधे तेच अंतर कायम ठेवून कंपासचे टोक B बिंदूवर ठेवा. पूर्वीच्या कंसाला छेदणारा आणखी एक कंस काढा.
- दोन्ही कंसांच्या छेदनबिंदूला T नाव द्या.
- रेषा KT काढा.
- रेषा KT ही रेषा MN ला लंब आहे.

विचार करा.

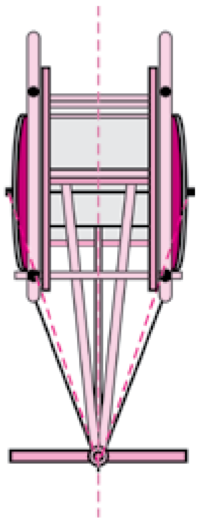
वरील कृती करताना कंपासमधील अंतर कायम का ठेवायचे ?

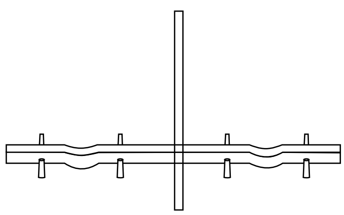
लंबदुभाजक

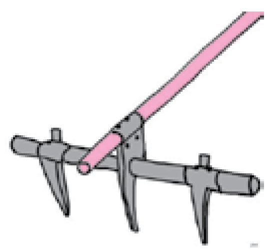
बैलगाडी ओढण्यासाठी 'जू' या लाकडी भागाचा वापर करतात.

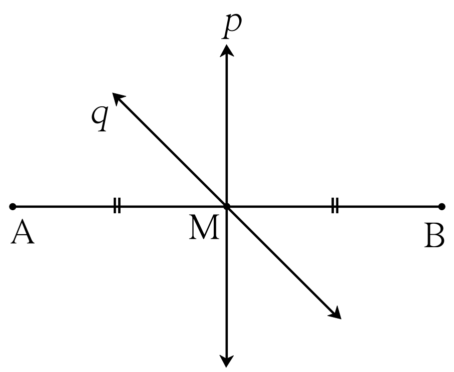
'जू' चे स्थान कसे निश्चित करतात ?

'जू' चे स्थान निश्चित करताना बैलगाडीच्या कण्याच्या दोन्ही टोकांपासून दोरीने समान अंतर घेतले जाते. यासाठी कोणता भौमितिक गुणधर्म वापरला, हे असे का केले जाते याची माहिती कारागिरांकडून किंवा अनुभवी लोकांकडून मिळवा.







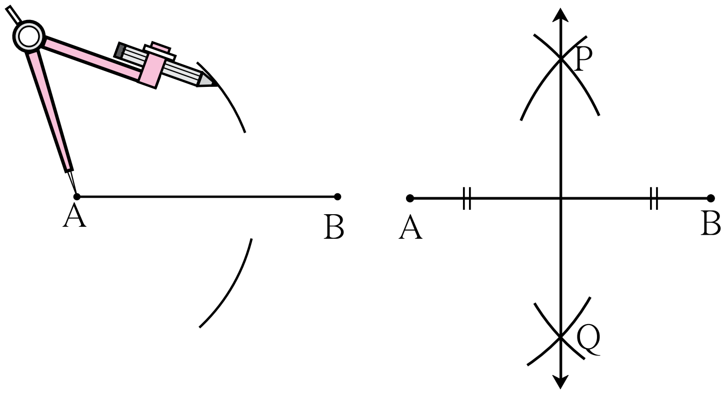


रेषाखंडाचा लंबदुभाजक

रेषा p आणि रेषा q, रेख AB च्या M या बिंदूतून जातात. रेषा p आणि रेषा q या रेख AB च्या दुभाजक रेषा आहेत. रेषा p आणि रेख AB यांच्यातील कोन मोजा.

या दोन रेषांपैकी रेषा p ही रेख AB ला लंबसुद्धा आहे. म्हणून रेषा p ला रेख AB ची **लंबदुभाजक रेषा** किंवा **लंबदुभाजक** म्हणतात. रेषा q ही रेख AB ची लंबदुभाजक का नाही ?

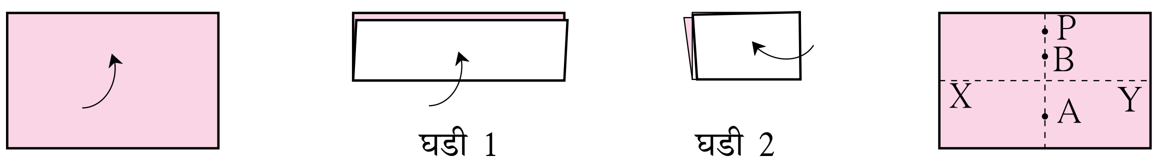
कंपासच्या साहाय्याने रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढणे



- रेषाखंड AB काढा.
- कंपासचे टोक A बिंदूवर ठेवा. कंपासध्ये A आणि B या दोन बिंदूंमधील अंतराच्या निम्म्यापेक्षा जास्त अंतर घेऊन रेषाखंडाच्या वरच्या व खालच्या बाजूंना एक-एक कंस काढा.
- कंपासमध्ये तेच अंतर कायम ठेवा आणि कंपासचे टोक B बिंदूवर ठेवून पूर्वीच्या कंसांना छेदणारे कंस काढा.
- कंसांच्या छेदनबिंदूंना P आणि Q अशी नावे द्या. रेषा PQ काढा.
- रेषा PQ ही रेख AB ची लंबदुभाजक रेषा आहे.

हे करून पाहा.

कृती : एक आयताकृती कागद घ्या. कागदाला खालून वर अशी एक घडी व उजवीकडून डावीकडे अशी दुसरी घडी घाला. कागदावर तयार झालेल्या दोन्ही घड्यांचे निरीक्षण करा. उभी घडी ही आडव्या घडीची लंबदुभाजक आहे, याची खात्री करून घ्या. त्यानंतर अंतरे मोजून खालील रिकाम्या जागा भरा.



l(XP) = ... सेमी l(XA) = ... सेमी l(XB) = ... सेमी

l(YP) = ... सेमी l(YA) = ... सेमी l(YB) = ... सेमी

उभ्या घडीवरील सर्व बिंदू आडव्या घडीवरील टोकांपासून (अंत्यबिंदूपासून) समान अंतरावर आहेत, असे दिसून येईल.

सरावसंच 40

1. रेषा l काढा. रेषेबाहेर कोठेही P बिंदू घ्या. गुण्याच्या मदतीने रेषा PQ ही रेषा l ला लंब रेषा काढा.
2. रेषा AB काढा. रेषेबाहेर कोठेही बिंदू M घ्या. कंपास व पट्टीचा वापर करून रेषा MN ही रेषा AB वर लंब रेषा काढा.
3. 5.5 सेमी लांबीचा रेख AB काढून तो कंपास व पट्टीच्या साहाय्याने दुभागा.
4. XY रेषेवर R बिंदू घ्या. गुण्याच्या साहाय्याने बिंदू R मधून जाणारी लंब रेषा काढा.

कार्ल गाऊसची युक्ती

कार्ल फ्रेडरिक गाऊस या प्रख्यात गणितीच्या बालपणची गोष्ट. कार्लच्या वर्गातील मुले खूप गडबड करत होती. त्यांना कामात गुंतवावे म्हणून शिक्षकांनी त्यांना 1 पासून 100 पर्यंतच्या संख्यांची बेरीज करायला सांगितले. कार्लने ती बेरीज दोन-तीन मिनिटांत केली आणि तो हातांची घडी घालून बसला. इतर मुले मात्र शिक्षकांच्या धाकाने खूप आकडेमोड करत बसली.

'नुसताच काय बसलायंस, बेरीज कर !' शिक्षक रागावले.

कार्लने केलेली बेरीज शिक्षकांना दाखवली. शिक्षक बरोबर उत्तर पाहून अचंबित झाले.

कशी केली होती कार्लने बेरीज ?

	1	2	3	....	99	100	(शंभर संख्या)
+	100	99	98	....	2	1	(शंभर संख्या)
	101 +	101 +	101 +	.... +	101 +	101	(शंभर वेळा)

ही बेरीज होईल 101×100

पण ही 1 ते 100 या संख्यांची दोनदा बेरीज झाली.

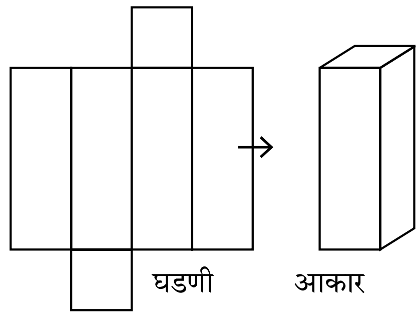
म्हणून 1 ते 100 या संख्यांची बेरीज $= \frac{101 \times 100}{2} = 101 \times 50 = 5050$

कार्लची हीच युक्ती वापरून तुम्ही 1 ते 50 या संख्यांची बेरीज करा.

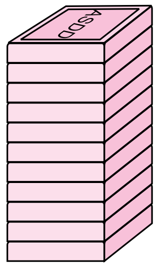
18 त्रिमितीय आकार

जरा आठवूया.

इष्टिकाचिती



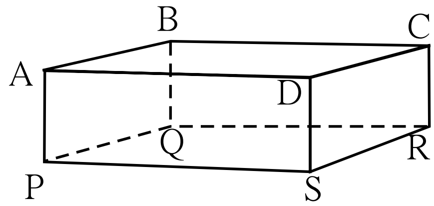
इष्टिकाचितीचा आकार आपण घडणीपासून तयार करायला शिकलो आहोत. हाच आकार आणखी कोणत्या प्रकाराने करता येतो, त्याची उदाहरणे द्या.



जाणून घेऊया.

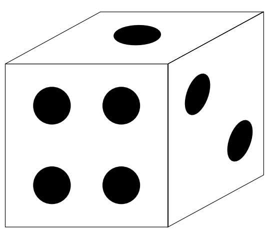
इष्टिकाचिती

इष्टिकाचितीची सर्व पृष्ठे आयताकार आहेत आणि समोरासमोरील पृष्ठे अगदी सारखी आहेत. इष्टिकाचितीला **चौकोनी चिती** देखील म्हणतात. या चितीला किती कडा आहेत ? या चितीला किती शिरोबिंदू आहेत ? या चितीला किती पृष्ठे आहेत ? शेजारील आकृतीत बिंदू A आणि बिंदू B हे आठ पैकी दोन शिरोबिंदू आहेत. रेख AB व रेख AP ही दोन कडांची नावे आहेत, तर ABCD हे एका पृष्ठाचे नाव आहे.



इष्टिकाचितीला 12 **कडा**, 8 **शिरोबिंदू** व 6 **पृष्ठे** असतात.

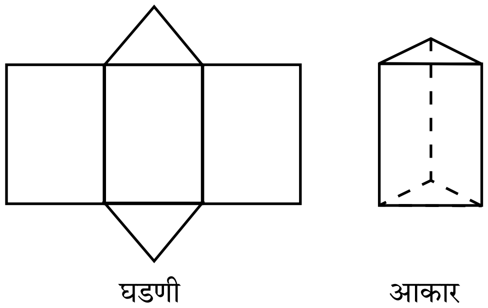
घन



शेजारील आकृतीतील फासा पाहा. फासा व चौकोनी चिती यांच्या आकारात काय फरक दिसतो ? चौकोनी चितीची सर्व पृष्ठे समान चौरसाकृती असतात. तेव्हा, त्या चितीला घन म्हणतात, म्हणजे फाशाचा आकार घन आहे.

- घनाला किती पृष्ठे असतात ?
- घनाला किती कडा असतात ?
- घनाला किती शिरोबिंदू असतात ?

त्रिकोणी चिती



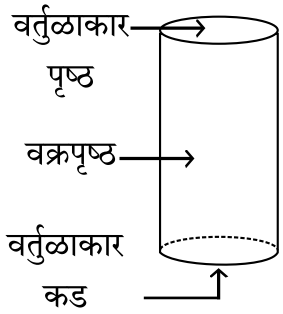
शेजारील आकृतीतील तळाच्या व वरच्या पृष्ठभागाचा आकार कोणता ?

बाजूंचे पृष्ठभाग कोणत्या आकारांचे आहेत ?

अशा आकृतीला **त्रिकोणी चिती** म्हणतात.

त्रिकोणी चितीला किती कडा, किती शिरोबिंदू व किती पृष्ठे आहेत ?

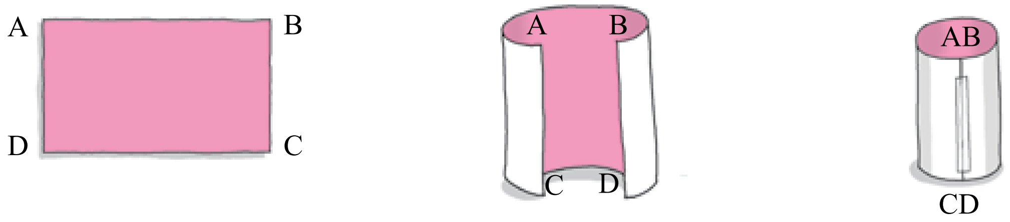
वृत्तचिती (दंडगोल)



वर्तुळाकार तळ असलेला उभा डबा तुम्ही पाहिला आहे का ? डबा हे वृत्तचितीचे सर्व परिचित उदाहरण आहे. डबा बंद असेल तर ही बंदिस्त वृत्तचिती असते. या आकाराचा तळ वर्तुळाकार असल्याने याला **वृत्तचिती** (वृत्त म्हणजे वर्तुळ) म्हणतात. बंदिस्त वृत्तचितीला दोन वर्तुळाकार सपाट पृष्ठे व एक वक्रपृष्ठ असते. वृत्तचितीला दोन वर्तुळाकार कडा असतात. एकही शिरोबिंदू नसतो. तुमच्या परिचयातील वृत्तचितीची उदाहरणे द्या.

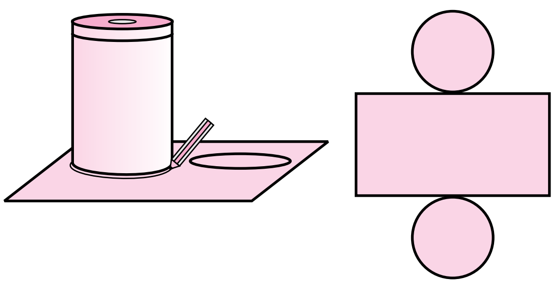
हे करून पाहा.

कृती :
- एक आयताकार कागद घ्या.
- त्याच्या समोरासमोरील बाजू एकमेकांशी जुळवा.
- पोकळ वृत्तचिती तयार होईल.



कृती : वृत्तचिती आकाराचा एक डबा घ्या. त्याच्या उंचीएवढा आयताकृती कागद त्याला गुंडाळा. तो उलगडून टेबलावर ठेवा.

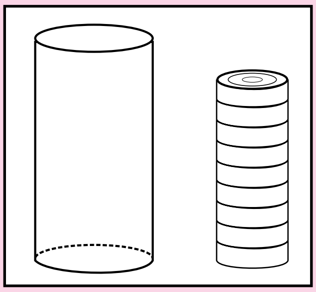
एक वेगळा कागद घ्या. तो डबा कागदावर ठेवून त्याच्या तळाच्या कडेने पेन्सिल फिरवून वर्तुळ काढा.



त्याभोवतालचा कागद कापून टाका. असेच आणखी एक वर्तुळ कापा. वरच्या आयताकृती कागदाला आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे या दोन वर्तुळाकार चकत्या चिकटून ठेवा. तयार झालेली आकृती बंद वृत्तचितीची घडण आहे. या घडणीपासून वृत्तचिती तयार करा.

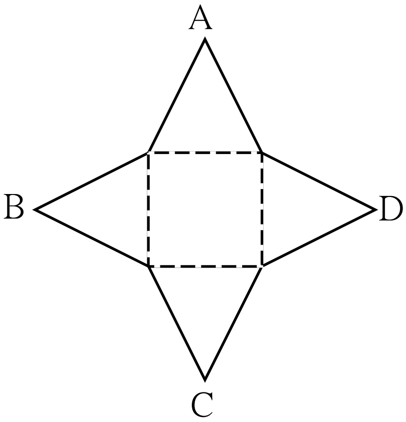
सांगा पाहू !

कॅरम खेळताना तुम्ही त्यातील सोंगट्यांची चवड चित्रात दाखवल्याप्रमाणे रचता. ही चवड म्हणजे कोणता आकार आहे ? सारख्या आकाराच्या सीडी किंवा सारख्या आकाराची वर्तुळाकार बिस्किटे एकमेकांवर ठेवा. कोणता आकार मिळतो ?



हे करून पाहा.

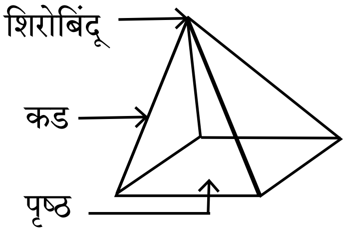
सूची



कृती : येथे एक घडण दाखवली आहे. त्रिकोणी पृष्ठे सारख्या आकाराची असणारी ही आकृती एका कार्डशीटवर काढा व कडांवर कापून घ्या. चौकोनाच्या ठिपक्यांच्या ओळींवर दुमड घालून A,B,C,D हे शिरोबिंदू एकत्र येतील असे जुळवा.

तुम्हांला खाली दाखवल्याप्रमाणे आकार दिसेल. याच्या तळाचे पृष्ठ चौकोनी आहे व उभी चार पृष्ठे त्रिकोणी आहेत.

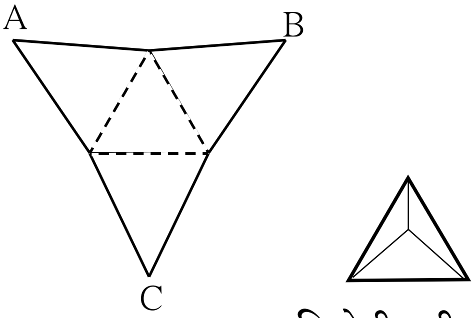
या प्रकारच्या आकाराला **सूची** (Pyramid) म्हणतात. या त्रिमितीय आकाराचे वरचे टोक सुईसारखे आहे. सुई म्हणजे सूची. या आकाराच्या तळाचे पृष्ठ चौकोनी आहे, म्हणून या आकाराचे नाव **चौकोनी सूची** आहे. या आकाराच्या कडा, शिरोबिंदू व पृष्ठे मोजा. चौकोनी सूचीला 5 पृष्ठे, 8 कडा व 5 शिरोबिंदू आहेत.



चौकोनी सूची

कृती : आकृतीत दाखवलेली घडण पुठ्ठ्यावर काढा व कडांवर कापून घ्या.

मधल्या त्रिकोणाच्या ठिपक्यांच्या बाजूंवर घड्या घालून कडेच्या त्रिकोणांचे A,B,C हे शिरोबिंदू जुळवा. तुम्हांला सूची तयार झालेली दिसेल. या सूचीचा तळ त्रिकोणी आहे म्हणून ही **त्रिकोणी सूची** आहे. या त्रिकोणी सूचीच्या कडा, शिरोबिंदू व पृष्ठे यांची संख्या लिहा.



त्रिकोणी सूची

हे मला समजले.

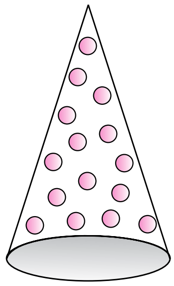
चितीच्या तळाचा पृष्ठभाग व वरचा पृष्ठभाग हे सारखे असतात. त्रिकोणी, चौकोनी इत्यादी चितींची उभी पृष्ठे आयताकृती असतात. सूचीची उभी पृष्ठे त्रिकोणाकृती असतात. चितीच्या व सूचीच्या तळाच्या आकारावरून त्या आकृतीचे नाव ठरते.

शंकू

पूर्वी आपण शंकूची व्यवहारातील उदाहरणे बघितली आहेत.

खालील चित्रातील आकाराचे नाव काय आहे ?

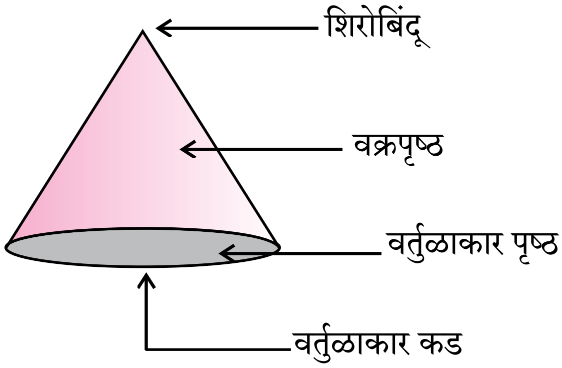
हा आइस्क्रीम भरून बंद केलेला कोन आहे. याचा वरचा वर्तुळाकार भाग बंद आहे.



ही विदूषकाची टोपी आहे. या टोपीचा तळाचा वर्तुळाकार भाग बंद नाही.

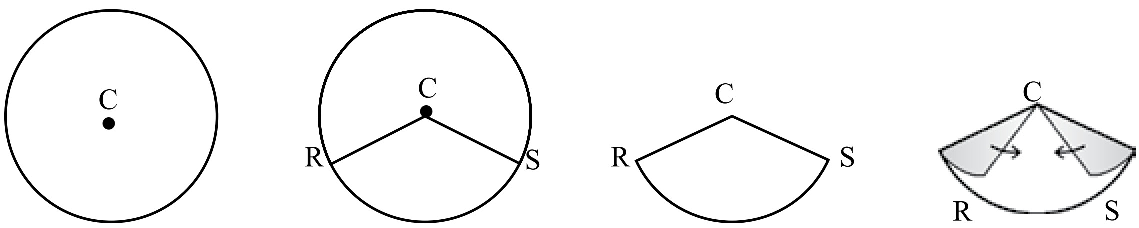
शंकूच्या टोकाला शंकूचा **शिरोबिंदू** म्हणतात. सपाट चकतीने बंद केलेल्या शंकूला एक वक्रपृष्ठ असते. एक वर्तुळाकार सपाट पृष्ठ असते व एक वर्तुळाकार कड असते.

बंद नसलेल्या शंकूला एक वक्रपृष्ठ आणि एक वर्तुळाकार कड असते, परंतु सपाट पृष्ठ नसते.



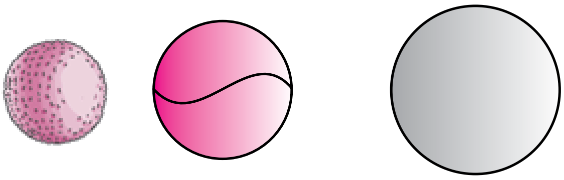
हे करून पाहा.

- C केंद्र असलेले वर्तुळ कंपासच्या साहाय्याने कागदावर काढा.
- वर्तुळाच्या CR व CS या दोन त्रिज्या काढा.
- वर्तुळ कापून घ्या.
- त्रिज्यांवर कापून त्याचे दोन तुकडे करा.
- प्रत्येक तुकड्याच्या CR व CS या बाजू एकमेकींना जोडा.



कृती पूर्ण केल्यावर कोणते आकार दिसतात ?

गोल

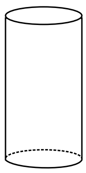
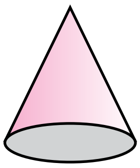
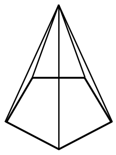
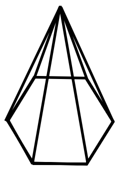
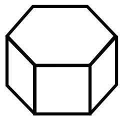
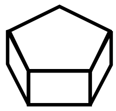


लाडू, चेंडू, गोळाफेकीचा धातूचा गोळा या आकारांना **गोल** म्हणतात.

गोलाला **एकच वक्राकार पृष्ठ** असते. गोलाला कडा किंवा शिरोबिंदू नसतात.

सरावसंच 41

1. खालील प्रत्येक आकृतीची पृष्ठे, कडा, शिरोबिंदू यांची संख्या लिहून सारणी पूर्ण करा.

नाव	वृत्तचिती	शंकू	पंचकोनी सूची	षटकोनी सूची	षटकोनी चिती	पंचकोनी चिती
आकार						
पृष्ठे						
शिरोबिंदू						
कडा						

उत्तर सूची

सरावसंच 1

1. एकरेषीय बिंदू : (i) बिंदू M, बिंदू O, बिंदू T (ii) बिंदू R, बिंदू O, बिंदू N
   (2) किरण OM, किरण OP, किरण ON, किरण OT, किरण OS, किरण OR
   (3) रेख MT, रेख RN, रेख OP, रेख ON, रेख OT, रेख OS, रेख OR, रेख OM
   (4) रेषा MT, रेषा RN
2. रेषा l, रेषा AB, रेषा AC, रेषा AD, रेषा BC, रेषा BD, रेषा CD
3. (i) ↔ (c), (ii) ↔ (d), (iii) ↔ (b), (iv) ↔ (a)
4. समांतर रेषा : (i) रेषा b, रेषा m, रेषा q (ii) रेषा a, रेषा p
   एकसंपाती रेषा : (i) रेषा a, रेषा b, रेषा c, रेषा AC (ii) रेषा p, रेषा q, रेषा AD
   संपातबिंदू : बिंदू A, बिंदू D

सरावसंच 2

1. (1) ↔ (b), (2) ↔ (c), (3) ↔ (d), (4) ↔ (a)
2. (1) लघुकोन (2) शून्यकोन (3) प्रविशालकोन (4) पूर्ण कोन
   (5) सरळकोन (6) विशालकोन (7) विशालकोन (8) काटकोन
3. (a) लघुकोन (b) काटकोन (c) प्रविशालकोन (d) सरळकोन (e) शून्यकोन (f) पूर्ण कोन

सरावसंच 3

सरावसंच 4

1. ऋण संख्या : −5, −2, −49, −37, −25, −4, −12
   धन संख्या : +4, 7, +26, 19, +8, 5, 27
2. सिमला : −7 °C, लेह : −12 °C, दिल्ली : +22 °C, नागपूर : +31 °C
3. (1) −512 मी (2) 8848 मी (3) 120 मी (4) −2 मी

सरावसंच 5

1. (1) 14 (2) 6 (3) −1 (4) −5 (5) −8 (6) −7
2.

+	8	4	−3	−5
−2	−2 + 8 = +6	2	−5	−7
6	6 + 8 = 14	10	3	1
0	0 + 8 = 8	4	−3	−5
−4	−4 + 8 = 4	0	−7	−9

सरावसंच 6

1.

संख्या	47	+52	-33	-84	-21	+16	-26	80
विरुद्ध संख्या	-47	-52	+33	+84	+21	-16	+26	-80

सरावसंच 7

1.

(1) -4 [<] 5	(2) 8 [>] - 10	(3) + 9 [=] + 9	(4) -6 [<] 0
(5) 7 [>] 4	(6) 3 [>] 0	(7) -7 [<] 7	(8) -12 [<] 5
(9) -2 [>] -8	(10) -1 [>] -2	(11) 6 [>] -3	(12) -14 [=] -14

सरावसंच 8

1.

-	6	9	-4	-5	0	+7	-8	-3
3	-3	-6	7	8	3	-4	11	6
8	2	-1	12	13	8	1	16	11
-3	-9	-12	1	2	-3	-10	5	0
-2	-8	-11	2	3	-2	-9	6	1

सरावसंच 9

1. (i) $\frac{37}{5}$ (ii) $\frac{31}{6}$ (iii) $\frac{19}{4}$ (iv) $\frac{23}{9}$ (v) $\frac{12}{7}$

2. (i) $4\frac{2}{7}$ (ii) $1\frac{3}{4}$ (iii) $1\frac{3}{12}$ किंवा $1\frac{1}{4}$ (iv) $1\frac{3}{8}$ (v) $5\frac{1}{4}$ (vi) $2\frac{6}{7}$

3. (i) $\frac{9}{5}$ किग्रॅ (ii) $\frac{11}{5}$ मीटर

सरावसंच 10

1. (i) $8\frac{2}{3}$ (ii) $4\frac{3}{4}$ (iii) $7\frac{12}{35}$ (iv) $5\frac{8}{15}$

2. (i) $2\frac{1}{12}$ (ii) $2\frac{1}{6}$ (iii) $1\frac{1}{40}$ (iv) $4\frac{3}{10}$

3. (1) 6 किग्रॅ, ₹192 (2) $\frac{4}{15}$ (3) 340 ली.

सरावसंच 11

1. (1) $\frac{5}{6}, \frac{10}{6}$ (2) $\frac{3}{5}, \frac{7}{5}$ (3) $\frac{3}{7}, \frac{10}{7}$

सरावसंच 12

1. (i) $\frac{7}{20}$ (ii) $\frac{12}{35}$ (iii) $\frac{20}{81}$ (iv) $\frac{8}{77}$ (v) $\frac{7}{10}$ (vi) $\frac{9}{8}$ (vii) 1 (viii) $\frac{9}{17}$
2. 6 एकर
3. 1,80,000

सरावसंच 13

1. (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{3}{11}$ (iii) $\frac{13}{5}$ (iv) $\frac{1}{2}$ (v) $\frac{7}{6}$
2. (i) $\frac{8}{3}$ (ii) $\frac{10}{27}$ (iii) $\frac{33}{35}$ (iv) $\frac{77}{48}$
3. $\frac{1}{750}$ भाग

सरावसंच 14

1. स्थानिक किंमत : 70, 8, 0.02
2. (1) 932.697 (2) 739.65 (3) 70.151
3. (1) 83.615 (2) 534.79 (3) 182.819
4. 55.465 किमी
5. ₹ 486 6. 2.5 किग्रॅ 7. 30.6 किमी

सरावसंच 15

1. (1) $\frac{3}{5} = \frac{3\times\boxed{2}}{5\times\boxed{2}} = \frac{\boxed{6}}{10} = \boxed{0.6}$ (2) $\frac{25}{8} = \frac{25\times\boxed{125}}{8\times125} = \frac{\boxed{3125}}{1000} = 3.125$

   (3) $\frac{21}{2} = \frac{21\times\boxed{5}}{2\times\boxed{5}} = \frac{\boxed{105}}{10} = \boxed{10.5}$ (4) $\frac{22}{40} = \frac{11}{20} = \frac{11\times\boxed{5}}{20\times5} = \frac{\boxed{55}}{100} = \boxed{0.55}$

2. (1) 0.75 (2) 0.8 (3) 1.125 (4) 0.85 (5) 0.9 (6) 0.28 (7) 0.095
3. (1) $\frac{275}{10}$ (2) $\frac{7}{1000}$ (3) $\frac{908}{10}$ (4) $\frac{3915}{100}$ (5) $\frac{312}{100}$ (6) $\frac{704}{10}$

सरावसंच 16

1. 14.265 2. 10.9151 3. (1) 3.78 (2) 24.063 (3) 1.14 (4) 3.528

4. 94.5 किग्रॅ, ₹ 3969 5. 2.25 मीटर

सरावसंच 17

1. (1) 2.4 (2) 3.5 (3) 10.3 (4) 1.3 2. 1000 झाडे किंवा 1002 झाडे

3. 0.425 किमी 4. ₹ 38000

सरावसंच 18

(1) उभ्या रेषेवर तापमान, आडव्या रेषेवर शहरे (2) चंद्रपूर

(3) पाचगणी व माथेरान, पुणे व नाशिक (4) पुणे व नाशिक

(5) 10 °C

सरावसंच 19

सरावसंच 20

1. एकापेक्षा जास्त सममिती अक्ष आकृती (1), (2) व (4)
2. सममिती अक्ष असणारी अक्षरे : A. B. C, D, E, H, I, K, M, O, T, U, V, W, X, Y
   एकापेक्षा जास्त समिमिती अक्ष असणारे अक्षरे : H, I, O, X

सरावसंच 21

सरावसंच 22

3 ची परडी : 111, 369, 435, 249, 666, 450, 960, 432, 999, 72, 336, 90, 123, 108.
4 ची परडी : 356, 220, 432, 960, 72, 336, 108
9 ची परडी : 369, 666, 450, 432, 999, 72, 90, 108

सरावसंच 23

(1) 12 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 12
16 चे विभाजक : 1, 2, 4, 8, 16
सामाईक विभाजक : 1, 2, 4

(2) 21 चे विभाजक : 1, 3, 7, 21

24 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

सामाईक विभाजक : 1, 3

(3) 25 चे विभाजक : 1, 5, 25

30 चे विभाजक : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

सामाईक विभाजक : 1, 5

(4) 24 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

25 चे विभाजक : 1, 5, 25

सामाईक विभाजक : 1

(5) 56 चे विभाजक : 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56

72 चे विभाजक : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 18, 24, 36, 72

सामाईक विभाजक : 1, 2, 4, 8

सरावसंच 24

1. (1) 15 (2) 16 (3) 1 (4) 7 (5) 24 (6) 9 (7) 12 (8) 25 (9) 6 (10) 75
2. 3 मीटर 3. 4 मीटर 4. 28 विद्यार्थी
5. 90 किग्रॅ, बासमतीच्या 29 पिशव्या, इंद्रायणीच्या 22 पिशव्या

सरावसंच 25

1. (1) 45 (2) 30 (3) 84 (4) 60 (5) 88
2. (1) 100 मुले (2) 240 मणी (3) 360 लाडू (4) 120 सेकंद (5) $\frac{65}{225}$, $\frac{66}{225}$, $\frac{131}{225}$

सरावसंच 26

1. $16 \div 2 = 10 - 2$, $5 \times 2 = 37 - 27$, $9 + 4 = 6 + 7$,
   $72 \div 3 = 8 \times 3$, $4 + 5 = 19 - 10$

सरावसंच 27

1. (1) $x + 3$ (2) $x - 11$ (3) $15x$ (4) $4x = 24$
2. (1) दोन्ही बाजूंतून 9 वजा करू. (2) दोन्ही बाजूंत 4 मिळवू. (3) दोन्ही बाजूंना 8 ने भागू.
   (4) दोन्ही बाजूंना 6 ने गुणू.
3. (1) नाही (2) आहे (3) आहे (4) नाही
4. (1) y = 6 (2) t = 3 (3) x = 13 (4) m = 23 (5) p = 36 (6) x = – 5
   (7) m = – 7 (8) p = – 5
5. (1) 210 मेंढ्या (2) 19 बाटल्या, 4750 ग्रॅम म्हणजेच 4.75 किग्रॅ (3) 50 किग्रॅ

सरावसंच 28

1. (1) 3:7 (2) 9:7 (3) 4:5 (4) 7:5 (5) 7:13 (6) 11:9
2. (1) $\frac{5}{8}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) $\frac{9}{4}$ (6) $\frac{4}{1}$ (7) $\frac{3}{5}$ (8) $\frac{3}{2}$ (9) $\frac{5}{4}$
3. $\frac{4}{3}$ 4. $\frac{3}{5}$ 5. $\frac{4}{11}$ 6. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{6}{7}$ (3) $\frac{5}{17}$

सरावसंच 29

1. (1) ₹ 2880 (2) ₹ 260 (3) ₹ 5136 (4) 216 किग्रॅ (5) 6 तास, 440 किमी
(6) 76 लीटर (7) 5600 किग्रॅ (8) 208 झाडे (9) 4 शेततळी, ₹ 72000

सरावसंच 30

1. (1) 92% (2) 70%, 30% (3) 14625 चौमी (4) 4 मेसेजेस (5) 96%
(6) जांभुळगावातील महिलांचे प्रमाण जास्त

सरावसंच 31

1. (1) नफा ₹ 500 (2) तोटा ₹ 10 (3) नफा ₹ 99 (4) तोटा ₹ 80
2. ₹ 400 नफा 3. ₹ 225 नफा 4. ₹ 7050 5. ₹ 50 तोटा 6. ₹ 200 तोटा 7. ₹ 1500 नफा

सरावसंच 32

1. तोटा ₹ 50 2. नफा ₹ 8000 3. तोटा ₹ 150 4. ₹ 941 5. प्रत्येकी ₹ 14500
6. नफा ₹ 9240

सरावसंच 33

1. शर्टचा व्यवहार अधिक फायदेशीर 2. शामरावांचा व्यवहार अधिक फायदेशीर 3. 25% नफा

सरावसंच 34

1. 75% नफा 2. 5% तोटा 3. $16\frac{2}{3}$ % नफा 4. $7\frac{1}{2}$ % नफा 5. $11\frac{1}{9}$ % नफा
6. 20% तोटा

सरावसंच 35

1. ₹ 600 2. ₹ 9169 3. ₹ 28000 4. ₹ 2115

सरावसंच 36

1. काटकोन, विशालकोन, लघुकोन 2. समभुज, विषमभुज, समद्विभुज
3. AC मार्गाने गेल्यास कमी अंतर पडेल कारण त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या लांबींची बेरीज तिसऱ्या बाजूच्या लांबीपेक्षा जास्त असते.
4. (1) विषमभुज त्रिकोण (2) समद्विभुज त्रिकोण (3) समभुज त्रिकोण (4) विषमभुज त्रिकोण
5. त्रिकोण काढता येतील (2), (5), (6) त्रिकोण काढता येणार नाहीत (1), (3), (4)

सरावसंच 37

1. (1) पंचकोन (2) षटकोन (3) सप्तकोन (4) अष्टकोन

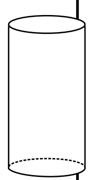
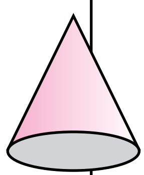
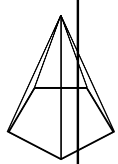
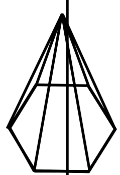
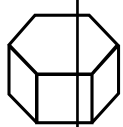
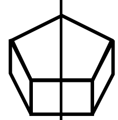
सरावसंच 38

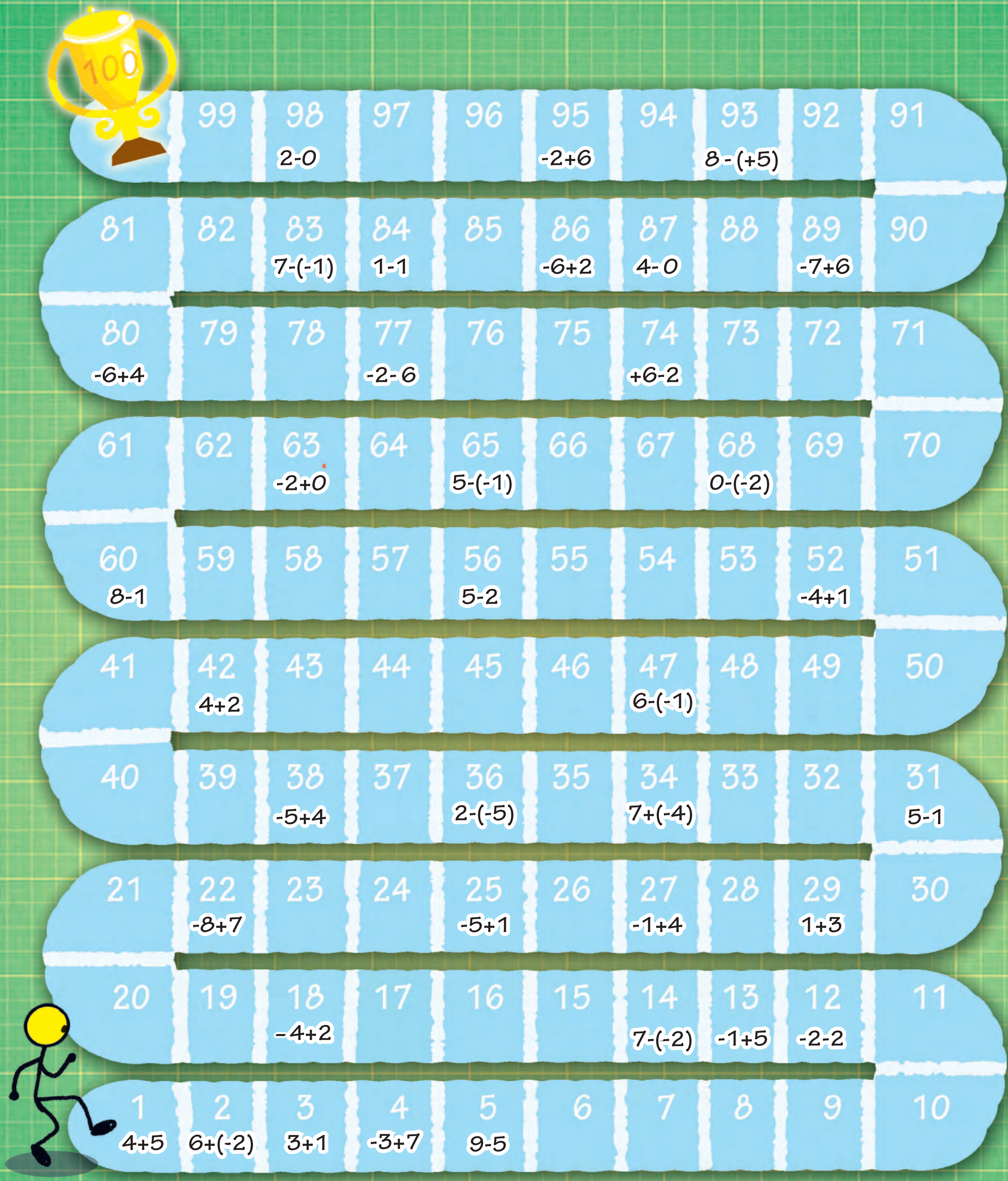
1. (1) $\angle X$ व $\angle Z$, $\angle Y$ व $\angle W$ (2) रेख XY व रेख ZW, रेख XW व रेख YZ
(3) रेख XY व रेख YZ, रेख YZ व रेख WZ; रेख WZ व रेख XW, रेख XW व रेख XY
(4) $\angle X$ व $\angle Y$, $\angle Y$ व $\angle Z$, $\angle Z$ व $\angle W$, $\angle X$ व $\angle W$ (5) कर्ण XZ व कर्ण YW
(6) □YZWX, □ZWXY, □XYZW इ.
2. चौकोन - 4, अष्टकोन - 8, पंचकोन - 5, सप्तकोन - 7, षटकोन - 6 5. 720°

सरावसंच 39

सरावसंच 40

सरावसंच 41

नाव	वृत्तचिती	शंकू	पंचकोनी सूची	षटकोनी सूची	षटकोनी चिती	पंचकोनी चिती
आकार						
पृष्ठे	1 वक्राकार	1 वक्राकार 1 सपाट	6	7	8	7
शिरोबिंदू	0	1	6	7	12	10
कडा	2 वर्तुळाकार	1 वर्तुळाकार	10	12	18	15



महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे-४११००४.

₹४१.००